DESARROLLO E INTERSECCIÓN DE

SÓLIDOS

JORGE LUIS CALDERÓN SALCEDO

Profesor Asociado de la Universidad de Los Andes

Mérida—Venezuela

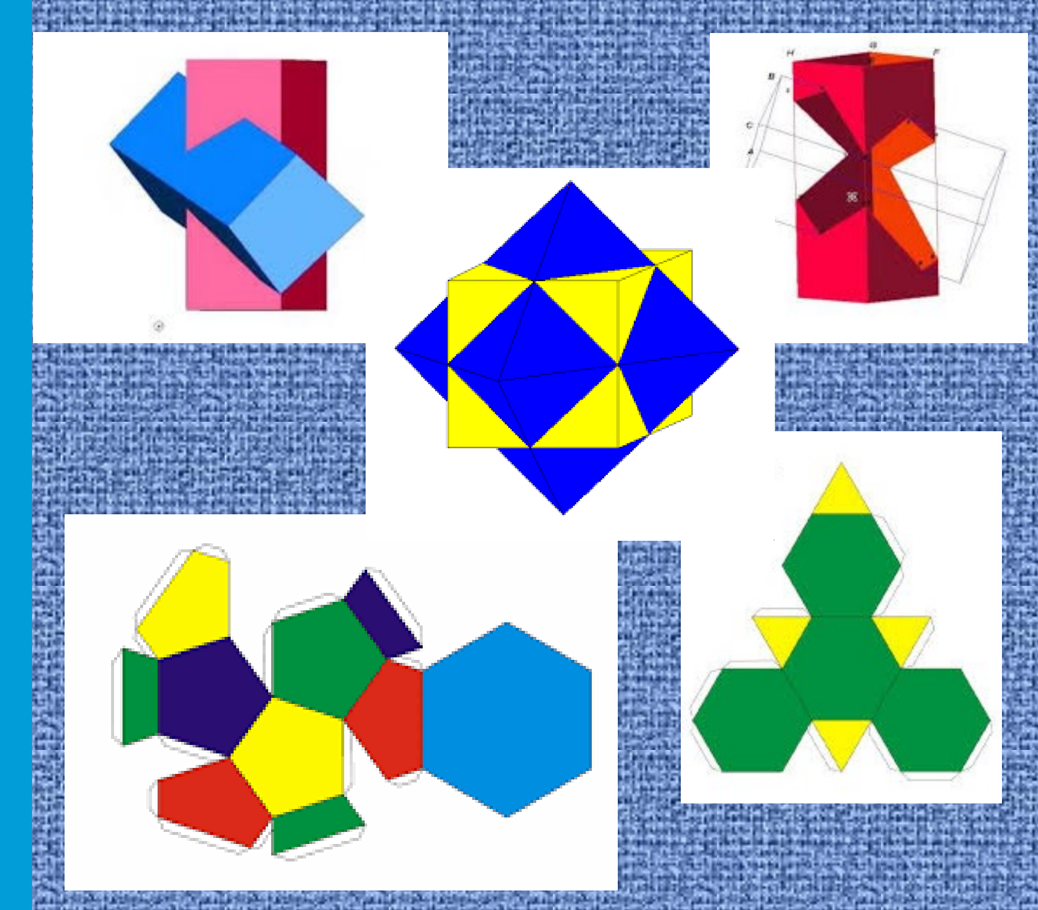




TABLA DE CONTENIDO

PRESENTACIÓN 1

DESARROLLO DE SÓLIDOS 3

DESARROLLO DE POLIEDROS RADIALES 3

DESARROLLO DE SUPERFICIES DE SIMPLE CURVATURA 9

INTERSECCIÓN DE SÓLIDOS 16

INTERSECCIÓN ENTRE UNA RECTA Y UN SÓLIDO 16

TIPOS DE INTERSECCIÓN DE SÓLIDOS 21

INTERSECCIÓN DE SÓLIDOS MEDIANTE EL MÉTODO DE PLANOS PROYECTANTES 22

INTERSECCIÓN DE SÓLIDOS MEDIANTE EL MÉTODO DE PLANOS DE SECCIÓN SENCILLA 40

Intersección de sólidos con bases coplanarias 42

Intersección de sólidos con bases no coplanarias 57

EJERCICIOS RESUELTOS 73

FUENTES 95

PRESENTACIÓN

En el marco del proceso de formación de ingenieros de cualquier especialidad, resulta de especial importancia el dominio de conceptos y procedimientos relativos a la correcta interpretación espacial de la realidad tridimensional representada en dos dimensiones, así como el desarrollo de habilidades dirigidas a la elaboración de planos y modelos que comuniquen ideas y proyectos ingenieriles. Es por ello que en los planes de estudio de las diferentes carreras de ingeniería ofrecidas por la Universidad de Los Andes (ULA), se incluyen dos cursos formales de Geometría Descriptiva denominados Sistemas de Representación 10 y Sistemas de Representación 20, ubicados en el primer y segundo período, respectivamente.

En el curso Sistemas de Representación 10, se introducen los conceptos y métodos propios del Sistema Diédrico o Doble Proyección Ortogonal de Monge, en tanto que el curso Sistemas de Representación 20, está dedicado al estudio de aplicaciones geométricas en dicho sistema y al conocimiento de sistemas de proyección específicos, como el Sistema Acotado y los llamados Sistemas Axonométricos. Dentro de las aplicaciones señaladas destacan, por su aplicabilidad en problemas de ingeniería, los tópicos relacionados con el desarrollo y la intersección de sólidos enfocados de forma general a cuerpos geométricos básicos, entendiéndose que el propósito general de la asignatura es el de dotar al estudiante de habilidades y herramientas que le permitan transferir los fundamentos a los problemas prácticos que le deparará su ejercicio profesional en el futuro.

El presente trabajo constituye una síntesis de los aspectos elementales de los procesos de desarrollo e intersección de sólidos, haciendo énfasis en sólidos radiales, tanto poliédricos como simplemente reglados. Se espera que sirva de guía práctica de consulta para los estudiantes de ingeniería de la ULA, tanto en el momento de cursar Sistemas de Representación 20 como en cualquier momento de su futuro como estudiantes y como ingenieros.

Los objetivos educacionales que pretende alcanzar esta obra son los siguientes:

- Que los estudiantes comprendan el fundamento de los métodos explicados
- Que los estudiantes apliquen correctamente los métodos expuestos en situaciones similares a las presentadas.

Evidentemente, es preciso que el lector posea una serie de conocimientos previos con un mínimo de competencia en su aplicación. Los contenidos que deben ser dominados antes de iniciar la lectura exitosa de este trabajo son los siguientes:

- Conceptos geométricos básicos en dos y tres dimensiones
- Características y leyes fundamentales del Sistema Diédrico
- Representación diédrica de elementos geométricos básicos: punto, recta y plano
- Relaciones geométricas de paralelismo, intersección y perpendicularidad entre rectas y planos, así como su comportamiento en el Sistema Diédrico
- Métodos de abatimiento, giro y cambios de plano de proyección
- Representación diédrica de poliedros, conos, cilindros y esferas
- Secciones planas de sólidos
- Construcción de cónicas
- Uso de instrumentos de dibujo técnico

Es deseo del autor que las líneas e imágenes plasmadas a continuación repercutan positivamente en su formación profesional.

Ing. M. Sc. Jorge Luis Calderón Salcedo

Profesor Asociado de la Universidad de Los Andes

Mérida, Venezuela, octubre de 2016

DESARROLLO DE SÓLIDOS

El desarrollo de un sólido es una operación mediante la cual se despliega su superficie sobre un plano, lo que permite su construcción física (Ranelletti, 1958).

Todos los poliedros son desarrollables, bastará con determinar el verdadero tamaño de cada una de sus caras y dibujándolas sobre un plano, de tal manera que sean adyacentes unas a otras por un lado común y en el mismo orden según el cual están dispuestas en el sólido. Si el dibujo se realiza sobre un cartón u otro tipo de material, se obtiene fácilmente el relieve del sólido, que no es sino un modelo tridimensional, practicando en cada lado común a dos caras una ligera incisión por la parte que será externa, y doblando todas las caras, de modo que tomen la misma posición relativa que tienen en la representación diédrica (Osers, 2004).

Los cuerpos redondos desarrollables son aquellos de simple curvatura (generados por una generatriz recta) en los que dos generatrices adyacentes son coplanarias, tal es el caso de los conos y cilindros.

DESARROLLO DE POLIEDROS RADIALES

Desarrollo de pirámides

Para obtener en verdadero tamaño una de las caras laterales de una pirámide, basta con determinar las longitudes de las tres aristas que la componen. Normalmente se apoya la base del poliedro sobre uno de los planos de proyección en aras de simplificar el procedimiento, pero si ella se encuentra en un plano no notable, será conveniente realizar una nueva proyección del sólido para conseguir el verdadero tamaño del polígono de base.

La determinación del verdadero tamaño de las aristas laterales de la pirámide puede realizarse cualquiera de los métodos ya conocidos, sin embargo se recomienda el uso del Giro aplicado a rectas, en vista de que todas esas aristas son convergentes en un punto (vértice del sólido). En la Fig. 1 se ha tomado un eje de giro de pié que pasa por V, convirtiendo cada una de las aristas laterales de la pirámide en segmentos frontales, cuyas proyecciones verticales se encuentran en verdadero tamaño. A continuación se dibuja una de las caras, la ABV en la figura, tomando un punto V arbitrariamente y

consignando las longitudes VA, VB y AB; seguidamente se procede de igual forma con la siguiente cara (BCV) y con las demás obteniéndose así el desarrollo de las caras laterales. Finalmente, se copia la base del sólido, que se encuentra en verdadero tamaño pues descansa sobre PH, haciendo coincidir uno de sus lados con la correspondiente arista del desarrollo de las caras laterales.

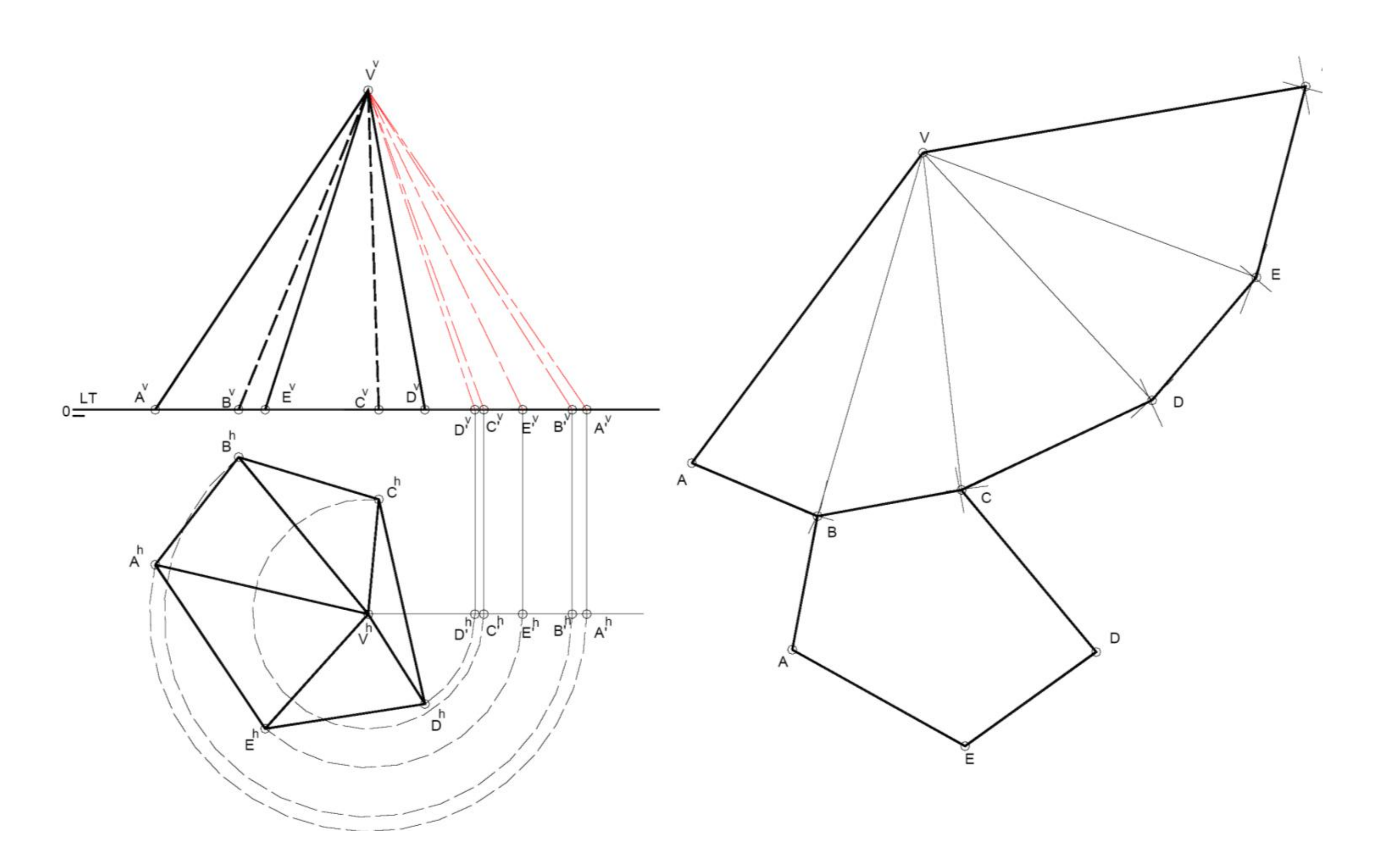


Fig. 1. Desarrollo de pirámide

Desarrollo de pirámides truncadas

Si la pirámide está truncada por un plano β, se procede determinando el vértice (punto virtual) del sólido (Fig. 2) y desarrollándolo como si no fuera truncado. El verdadero tamaño de la parte virtual de cada arista lateral se mide en el desarrollo a partir del punto V, obteniéndose la poligonal A1B1C1D1E1A1, transformada de la sección generada por el plano β en la pirámide. Finalmente, se halla el verdadero tamaño del polígono de sección aplicando cualquiera de los métodos estudiados en SR10 (Cambio

de Plano de proyección en la figura), para luego ser copiado haciendo coincidir uno de sus lados con el correspondiente segmento de la transformada de la sección, asegurándose de que el orden sea correcto.

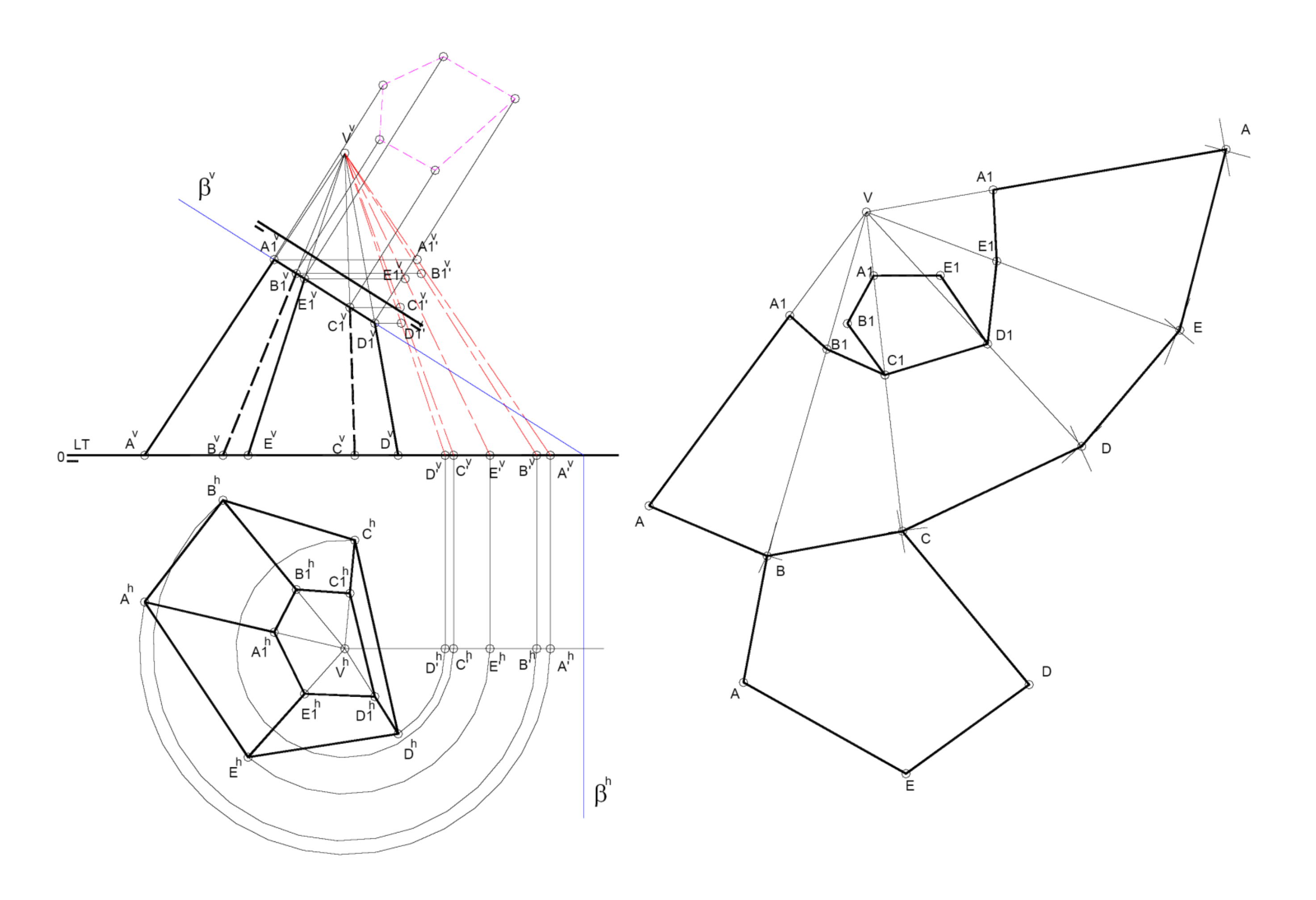


Fig. 2. Desarrollo de pirámide truncada

Desarrollo de prismas rectos

El desarrollo de la superficie lateral de un prisma recto es un rectángulo, cuya altura es igual a la altura del poliedro y de base igual a al perímetro del polígono base. En la Fig. 3 se muestra el procedimiento seguido para obtener el desarrollo de un prisma recto de base apoyado en un plano proyectante horizontal. El verdadero tamaño del polígono de base ABCD se ha determinado a través de un nuevo plano de proyección. Las aristas laterales del sólido son horizontales, por lo que se encuentran en verdadero tamaño en

la proyección horizontal; es evidente que todas esas aristas laterales son iguales en longitud.

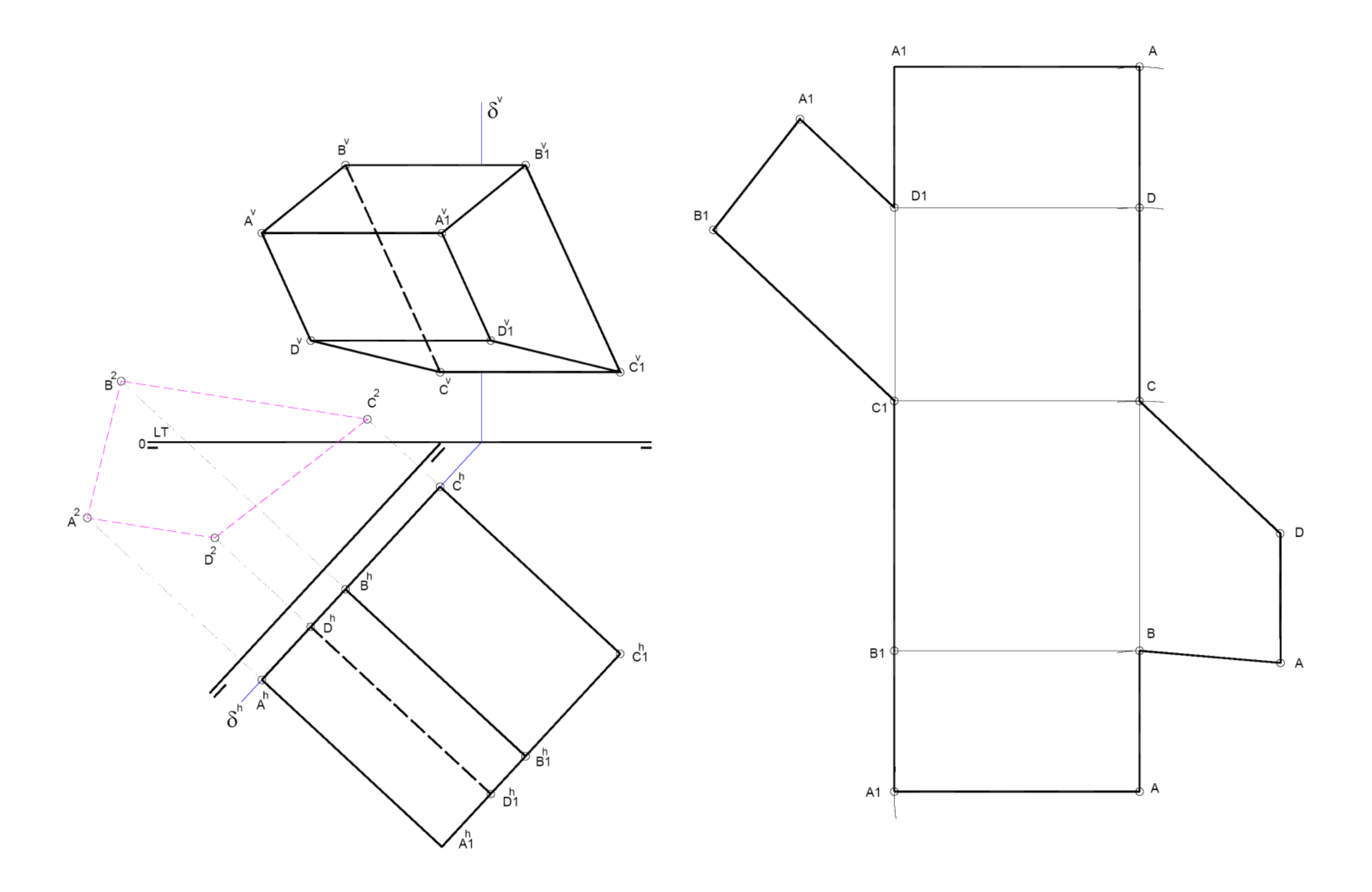


Fig. 3. Desarrollo de prisma recto

Sobre una línea arbitraria se miden a partir de un punto A los verdaderos tamaños AB, BC, CD y DA en forma sucesiva y en el mismo orden con que aparecen en la representación diédrica. A continuación se trazan perpendiculares a la mencionada línea por los puntos A, B, C y D, sobre las que se mide la altura del prisma. Finalmente se copian las bases superior e inferior (en verdadero tamaño) haciendo coincidir uno de los lados con la arista correspondiente en el desarrollo de la superficie poliédrica lateral.

Desarrollo de prismas oblicuos

El desarrollo de la superficie lateral de un prisma recto no es un rectángulo, por lo que el procedimiento consiste en desarrollar dos prismas rectos, que surgen al cortar el prisma oblicuo mediante un plano π perpendicular a sus aristas laterales. Esta operación resulta tediosa si dichas aristas se encuentran en posición oblicua; en tal caso es conveniente la generación de una nueva proyección en la que aparezcan con su verdadero tamaño.

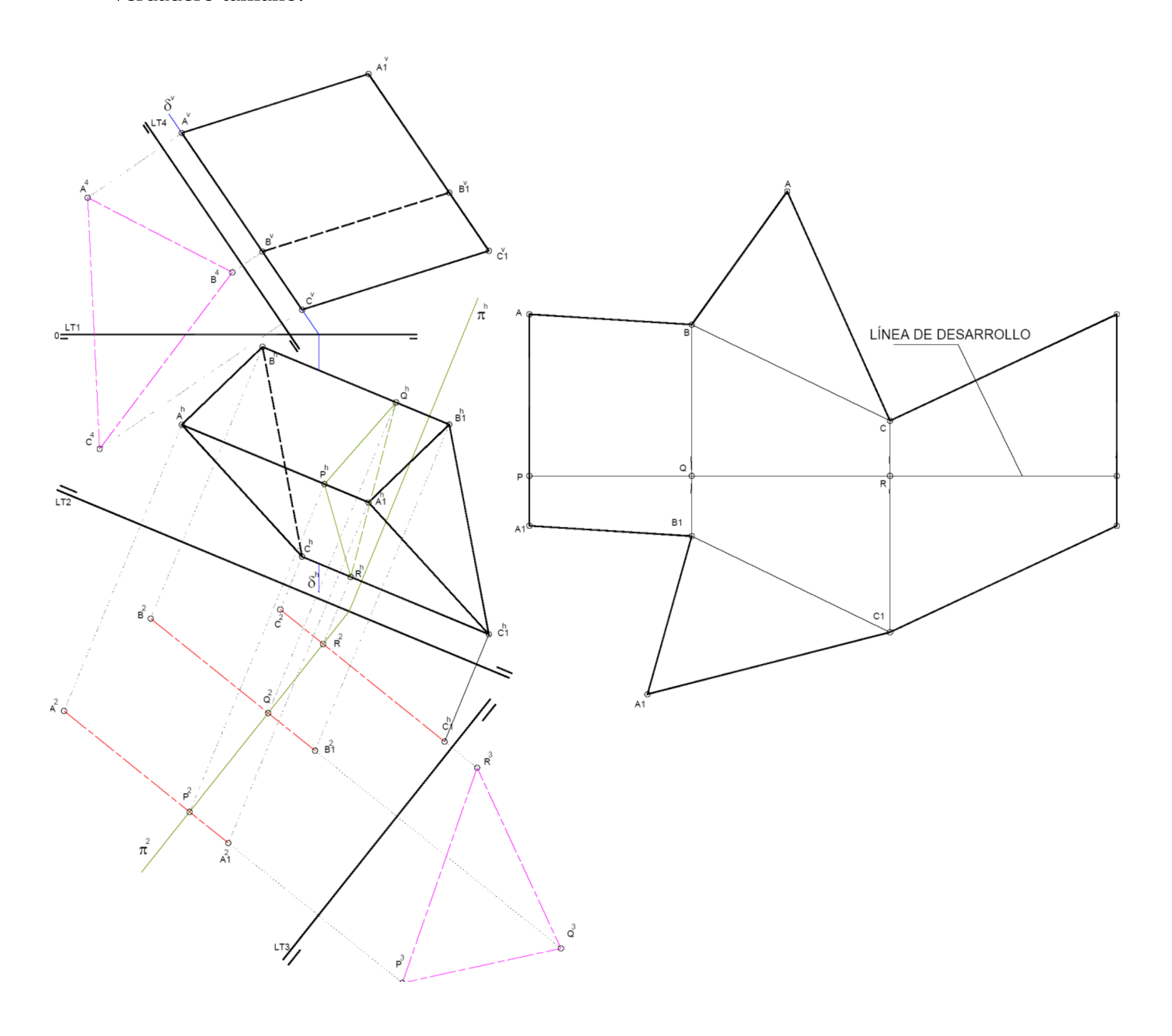


Fig. 4. Desarrollo de prisma oblicuo

La Fig. 4 muestra el desarrollo de un prisma oblicuo cuya base ABC está contenida en un plano δ. En primer lugar, se ha realizado una nueva proyección en la que cada una de las aristas laterales del poliedro aparece en verdadero tamaño, ya que en el sistema LT2 se encuentran en posición frontal. Si se construye un plano π perpendicular a las aristas laterales resulta ser proyectante vertical en el sistema LT2; los puntos de intersección entre dichas aristas y el plano π son los vértices de un polígono PQR (sección plana base de dos prismas rectos) cuyo verdadero tamaño se ha de determinar, para lo cual se genera un nuevo sistema LT3.

Para desarrollar la superficie lateral del prisma se dibuja una Línea de Desarrollo, correspondiente al perímetro de la sección plana PQR. A continuación se trazan perpendiculares a dicha línea de desarrollo por los puntos P, Q y R y sobre ellas se consignan las longitudes PA, QB y RC de un lado y las longitudes PA1, QB1 y RC1 del otro lado de la línea de desarrollo. Finalmente se copia la polígona base ABC, cuyo verdadero tamaño se ha determinado con antelación generando un nuevo sistema LT4, de forma lógica y ordenada. De igual forma se debe copiar el polígono de base superior A1B1C1, el cual es idéntico al polígono ABC.

Si el prisma es truncado el procedimiento a seguir es el mismo, con una sola diferencia: los polígonos de base inferior y de base superior son distintos, lo que hace que las aristas laterales sean de distinta longitud y que sea necesaria la determinación, por separado, del verdadero tamaño de dichos polígonos.

DESARROLLO DE SUPERFICIES DE SIMPLE CURVATURA

Desarrollo del cono de revolución recto

El desarrollo de la superficie de un cono de revolución recto es un sector circular de radio igual a la longitud l de las generatrices y de amplitud α dada a través de la expresión:

$$\alpha = \frac{360° \, x \, r}{l}$$

Donde r es el radio de la directriz del cono (Fig. 5).

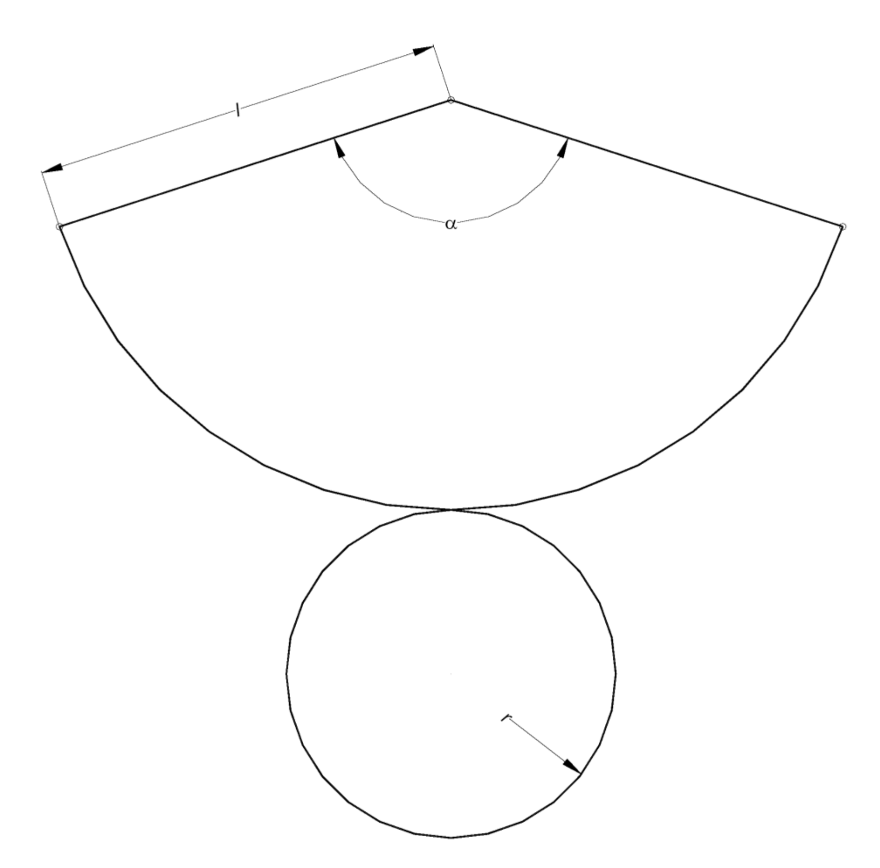


Fig. 5. Desarrollo de cono de revolución recto

Si se trata de un cono truncado es necesario determinar la transformada de la sección plana – generalmente elíptica – en el desarrollo. Dada la complejidad de dicha curva, es conveniente aplicar un procedimiento aproximado para resolver este tipo de problemas, el cual consiste en inscribir en el cono una pirámide de n caras laterales iguales y desarrollarla como ya se ha indicado.

El resultado es una solución que nunca es exacta, sino que tienen un error por defecto en relación con el cono real. Sin embargo, resulta razonable su aplicación si se escoge un número "n" que permita una operación rápida y simple y un margen de error razonable.

En la Fig. 6 se muestra el desarrollo de un cono recto apoyado en el plano horizontal y truncado por un plano β. El primer paso consiste en dividir la base del cono en un número conveniente de partes (ocho en la figura), lo que resulta en los puntos 1,2,..,,8. Luego se determina el vértice del cono y se halla el verdadero tamaño de las partes virtuales de cada una de las generatrices V1, V2,...., V8, que vienen a ser aristas laterales de una pirámide. Es evidente que las generatrices V1 y V5 son frontales, por lo que sus partes virtuales V1' y V2' se encuentran en verdadero tamaño en la proyección vertical. Por simetría, las partes virtuales de las generatrices V2 y V8 son de igual tamaño; lo mismo ocurre con las generatrices V3 y V7 y con las generatrices V4 y V6.

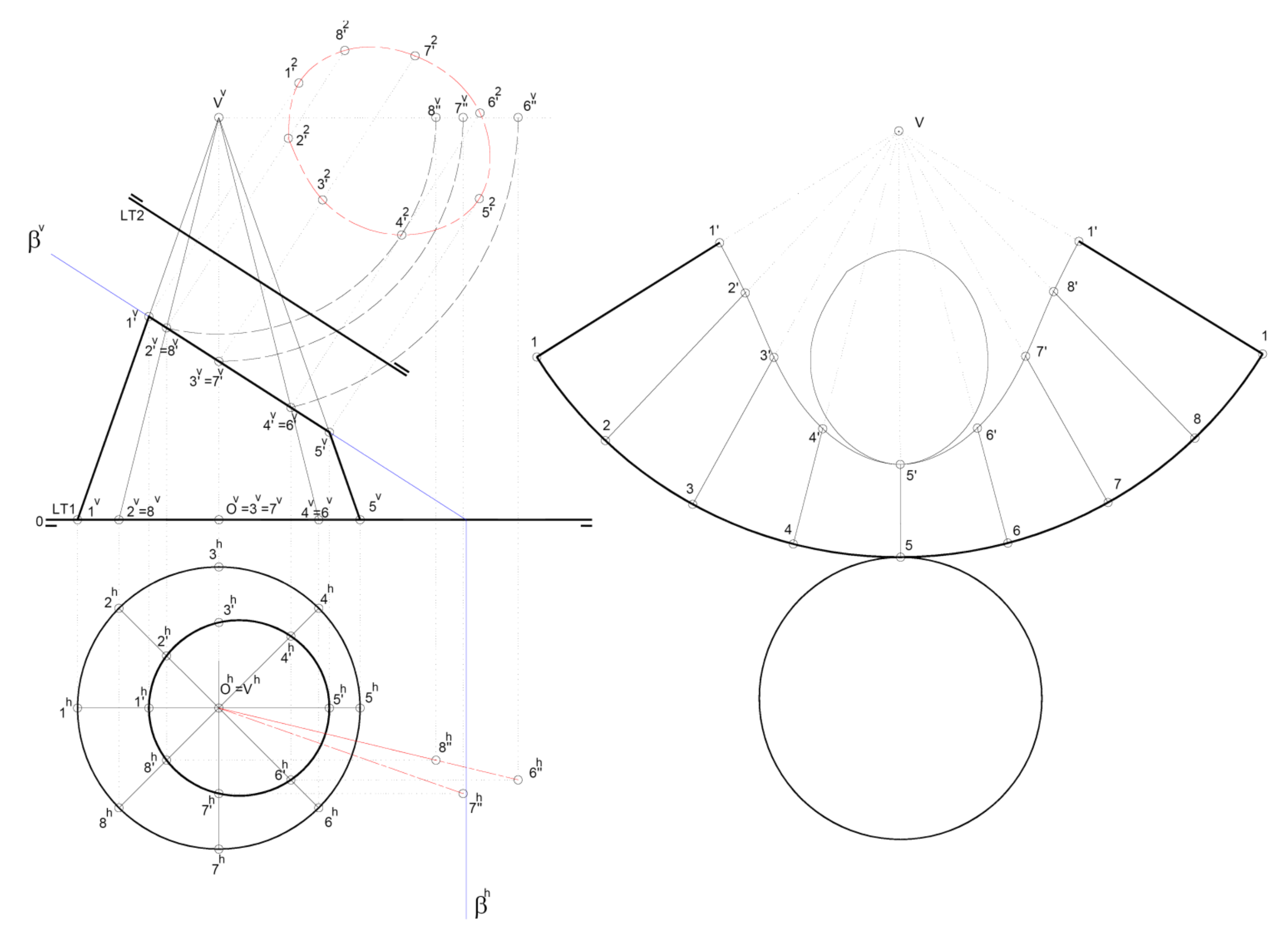


Fig. 6. Desarrollo de cono de revolución recto truncado

Luego se realiza el desarrollo de la pirámide de base 12345678 y vértice V, trazando un arco de centro en V y radio igual al tamaño de una de las generatrices del cono no truncado. Después se consigna sobre dicho arco y a partir de uno cualquiera de sus puntos, la distancia que corresponde a una de las aristas de base de la pirámide, haciéndolo de modo sucesivo hasta lograr el perímetro de dicha base.

Es necesario restar de cada una de las aristas de la pirámide su correspondiente segmento virtual, lo que da como resultado los puntos 1', 2',..., 8' en el desarrollo; estos puntos se deben unir usando una plantilla de curvas para dar lugar a la transformada de la sección elíptica. Finalmente, se copian los verdaderos tamaños de la directriz del cono (circunferencia) y de la sección producida por el plano β (elipse).

Desarrollo del cono oblicuo

De igual manera que con el cono recto truncado, en este caso es conveniente realizar un desarrollo aproximado de la superficie del sólido, inscribiendo en él una pirámide y de un número determinado de caras laterales y desarrollando ésta última. A mayor cantidad de caras laterales en la pirámide mejor será la precisión del método.

En la Fig. 7 se muestra el procedimiento seguido para desarrollar un cono oblicuo de base circular apoyada en PH y seccionado por un plano β. Se ha comenzado dividiendo la base del cono en ocho partes, comenzando por una de las generatrices contenidas en el plano perpendicular a la base que pasa por el eje (proyectante horizontal); esto se hace con la finalidad de obtener un desarrollo simétrico. La determinación de los verdaderos tamaños de cada una de las generatrices V1, V2,...., V8 – y de sus partes virtuales – se ha determinado aplicando un giro en torno a un eje de pié que pasa por el vértice V; nótese cómo gracias a la simetría se ha obtenido que V2=V8, V3=V7 y V4=V6.

En el desarrollo de la superficie cónica se ha procedido de acuerdo con el método utilizado en el caso de pirámide oblicua, construyendo las caras laterales a partir del tamaño de cada uno de sus lados y comenzando por 1V2. Seguidamente se resta a cada generatriz su parte virtual, lo que da como resultado los puntos 1’, 2’,…., 8’, los cuales deben ser unidos usando una plantilla de curvas; de igual forma se traza la curva correspondiente a la base del cono, definida por los puntos 1, 2,...., 8 en el desarrollo. Finalmente, es necesario hallar el verdadero tamaño de la sección (elíptica) producida por β para copiarla en forma lógica y coherente en el desarrollo.

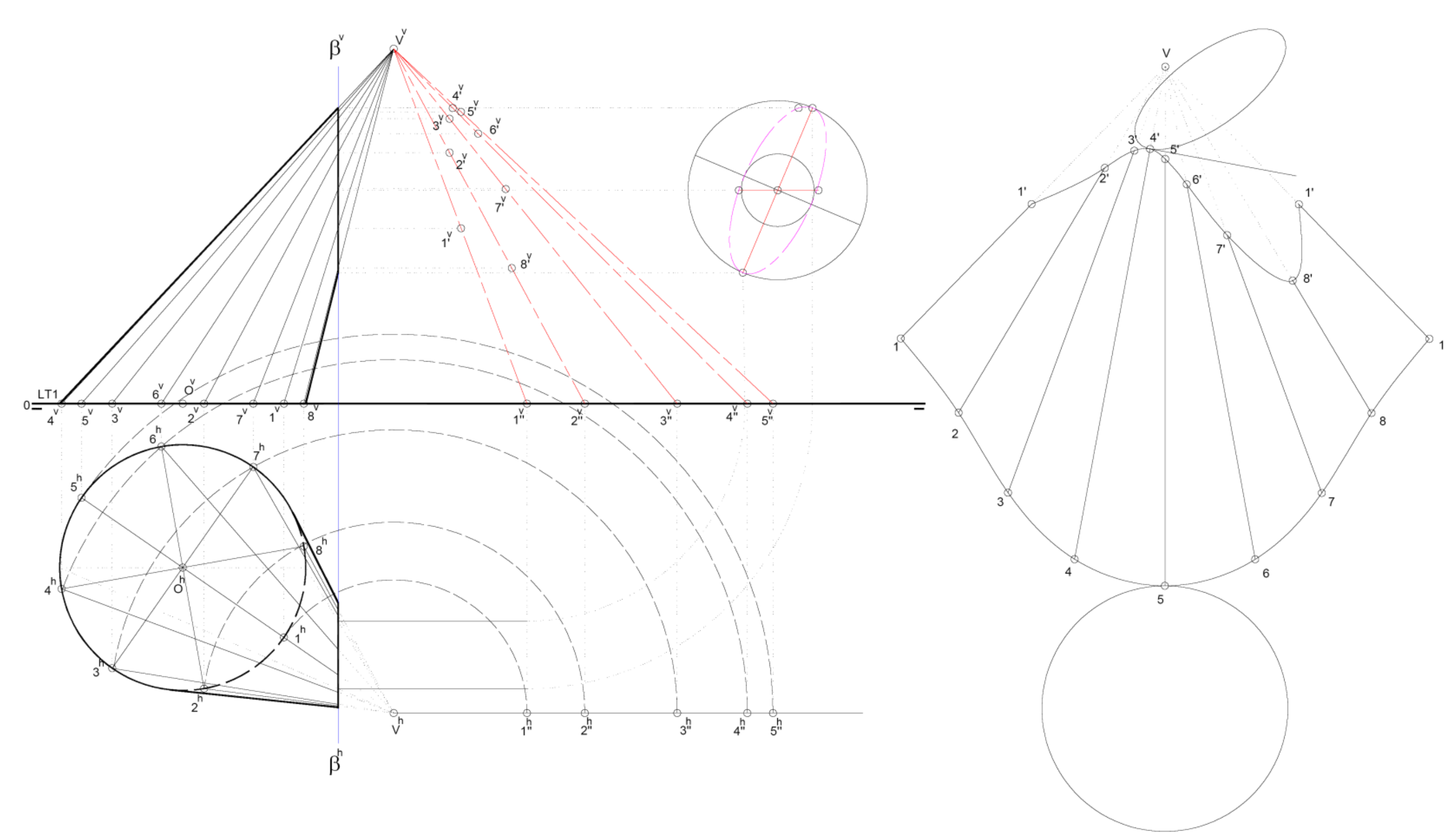


Fig. 7. Desarrollo de cono oblicuo truncado

Desarrollo del cilindro de revolución recto

El desarrollo de la superficie de un cilindro de revolución recto es un rectángulo cuya altura es igual a la longitud de las generatrices (altura del cilindro) y de base igual al perímetro de la directriz (2πr).

Si el cilindro es truncado será necesario determinar la transformada de la curva de sección (elipse), para lo cual se recurre al método aproximado que consiste en el desarrollo de un prisma inscrito en el cilindro. En la Fig. 8 se muestra el desarrollo de un cilindro de revolución recto apoyado en el plano horizontal y seccionado por un plano β. En vista de que la base del sólido y sus generatrices se encuentran en verdadero tamaño, por situarse la primera sobre PH y ser de pié las segundas, sólo resta aplicar algún método de los ya conocidos para determinar la verdadera forma y tamaño de la sección elíptica.

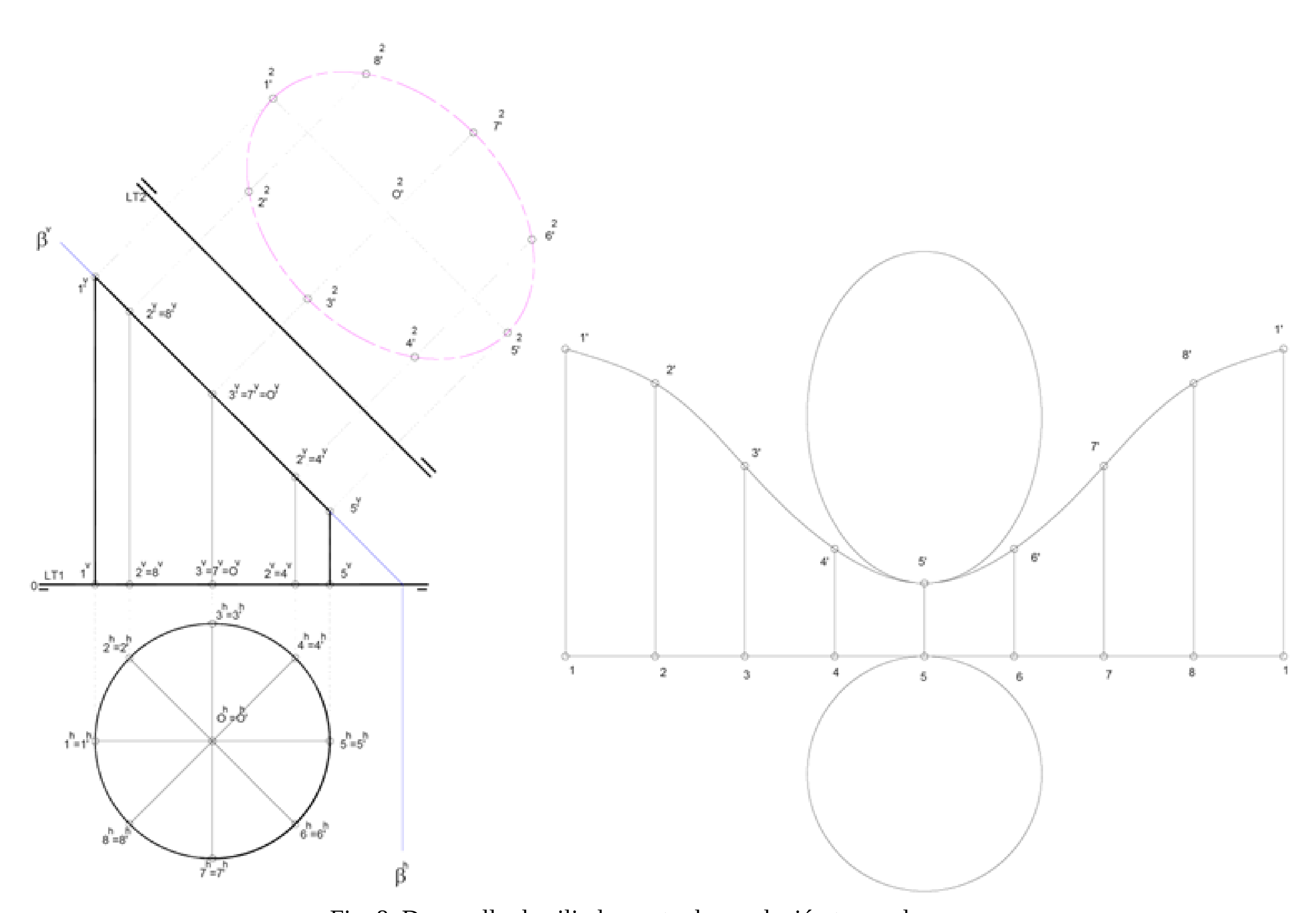


Fig. 8. Desarrollo de cilindro recto de revolución truncado

Desarrollo del cilindro oblicuo

El procedimiento generalmente usado para realizar el desarrollo de un cilindro oblicuo es el de inscribir en él un prisma. Es evidente que se trata de un método aproximado cuya exactitud depende del número de caras laterales que posea el prisma. En la Fig. 9 se ha desarrollado un cilindro oblicuo de base circular apoyada en el plano horizontal y

de generatrices oblicuas, truncado por un plano β. En primer lugar se ha dividido la base en ocho partes iguales, comenzando por una de las generatrices (V1) ubicadas en un plano perpendicular a la base que pasa por el eje del sólido; luego se trazan las generatrices correspondientes que serán las aristas del prisma inscrito en el cilindro (superficie a desarrollar).

Con la finalidad de obtener el verdadero tamaño de cada una de las generatrices escogidas (recuérdese que se trata de un cilindro truncado y que su eje es oblicuo) y de facilitar el corte mediante un plano perpendicular a ellas (véase Desarrollo de Prismas Oblicuos), se ha generado un nuevo sistema LT2. La sección ABCDEFGH producida por el plano π divide al cilindro en dos sólidos rectos; es necesario determinar el verdadero tamaño de dicha sección – sistema LT3 en la figura - y copiar su perímetro a lo largo de la línea de desarrollo, lo que genera los puntos A, B,..., H por los cuales se trazan perpendiculares a aquella. Seguidamente, se consignan las distancias A1, B2,..., H8 sobre tales perpendiculares de un lado de la línea de desarrollo y las distancias A1’, B2’,..., H8’ del otro.

En vista de que la sección producida por β en el cilindro no se encuentra en verdadero tamaño en el sistema Diédrico, se ha generado un cuarto sistema de proyección LT4 en el cual el plano β es horizontal.

Es preciso realizar una observación importante relacionada con la aplicación práctica de todo lo anteriormente tratado: a la hora de diseñar objetos útiles (envases, piezas mecánicas, moldes, etc.) y de ejecutar el desarrollo correspondiente, conviene situar al objeto - a los fines de su representación diédrica – en la posición más favorable posible, es decir, con la base apoyada en el plano horizontal y con el eje paralelo al plano vertical. De esta manera, algunos de los procedimientos explicados se verían sustancialmente simplificados, lo cual se traduce en una lógica disminución del tiempo invertido en el desarrollo.

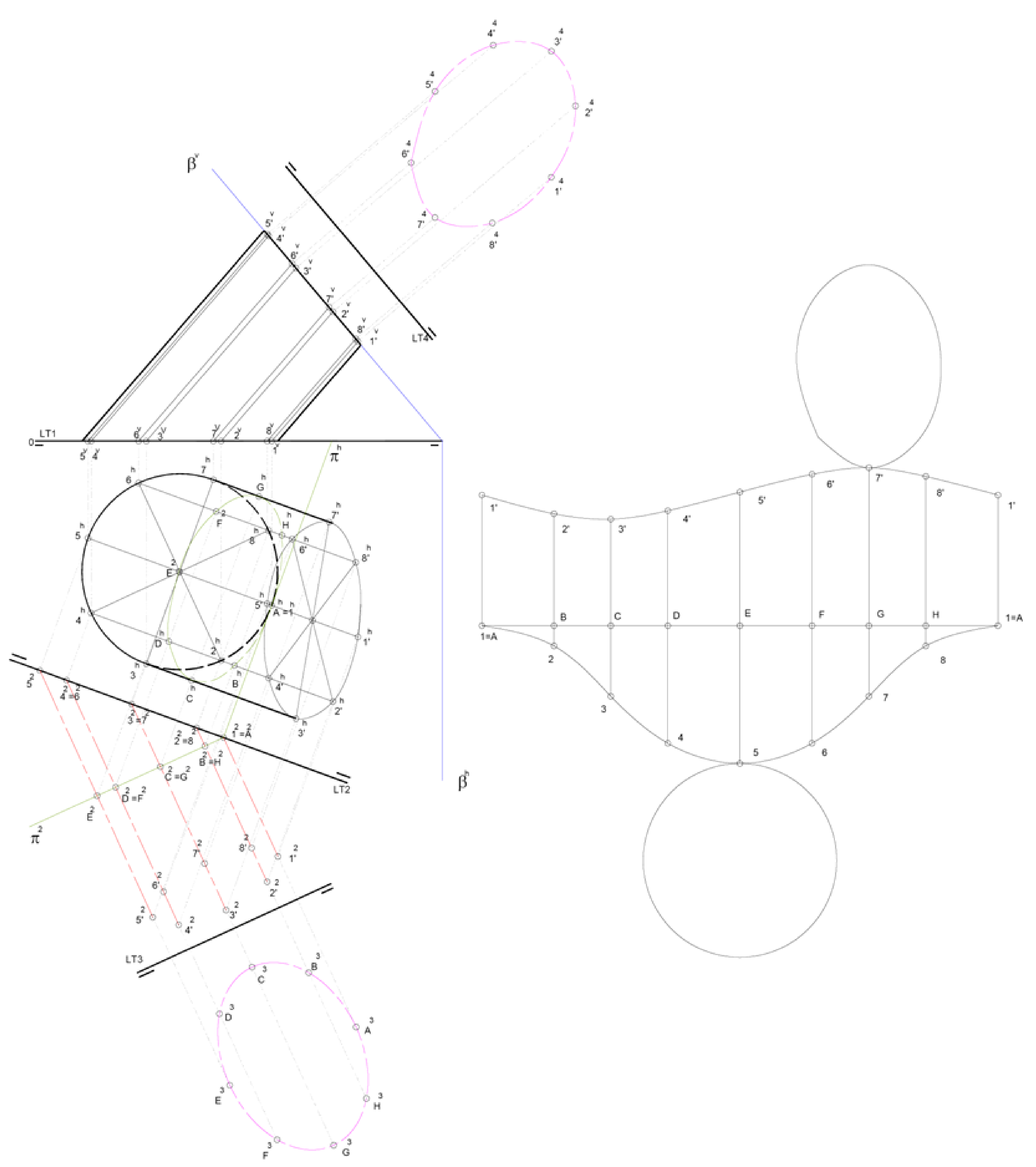


Fig. 9. Desarrollo de cilindro oblicuo truncado

INTERSECCIÓN DE SÓLIDOS

La línea generada por la intersección entre las superficies de dos sólidos, viene dada – en el caso de dos poliedros - por la unión de los puntos de penetración de todas las aristas de uno en el otro y viceversa. En el caso de sólidos con superficies curvas se determina la penetración de generatrices (conos, cilindros) o de paralelos (esferas, elipsoides) con la superficie opuesta. En definitiva, el problema de intersección entre dos sólidos corresponde a una repetición adecuada del problema de intersección entre una línea y un sólido, de modo que es con este asunto que debe iniciar el presente apartado.

INTERSECCIÓN ENTRE UNA RECTA Y UN SÓLIDO

Para resolver el problema de intersección entre una recta "m" y un sólido es preciso crear un plano σ que contenga a la recta y que produzca una sección en el sólido. Dado que las características de la sección producida dependen del tipo de sólido y de la posición del plano creado, es conveniente, en aras de la simplificación de los procedimientos, aplicar los siguientes métodos en función del tipo de sólido (sólo se tratan los tipos más comunes):

1. Si se trata de una pirámide, resulta apropiado que el plano σ genere una sección sencilla en el poliedro; para ello, dicho plano quedará determinado por la recta "m" y el vértice V de la pirámide (Fig. 10). Los pasos pasa determinar los puntos A y B (entrada y salida de la recta "m" en el sólido) son los siguientes:
    - Construir por un punto K, perteneciente a la recta "m", una recta "r" que pase por el vértice V de la pirámide. Ambas rectas definen el plano σ.
    - Determinar los puntos de intersección (1 y 2) entre las rectas "m" y "r" y el plano δ, base del sólido. La recta definida por estos puntos es la recta de intersección "i" entre los planos σ y δ.
    - Hallar los puntos de corte 3 y 4 entre la recta "i" y la base de la pirámide.
    - Unir los puntos 3 y 4 con el vértice de la pirámide.
    - Determinar el punto de corte A entre V3 y la recta "m" (punto de entrada de "m" en la pirámide).

- Determinar el punto de corte B entre V4 y la recta “m” (punto de salida de “m” en la pirámide).
- Estudiar la visibilidad del conjunto (un punto de entrada o salida será visible sólo si la cara en la que entra o sale es visible)

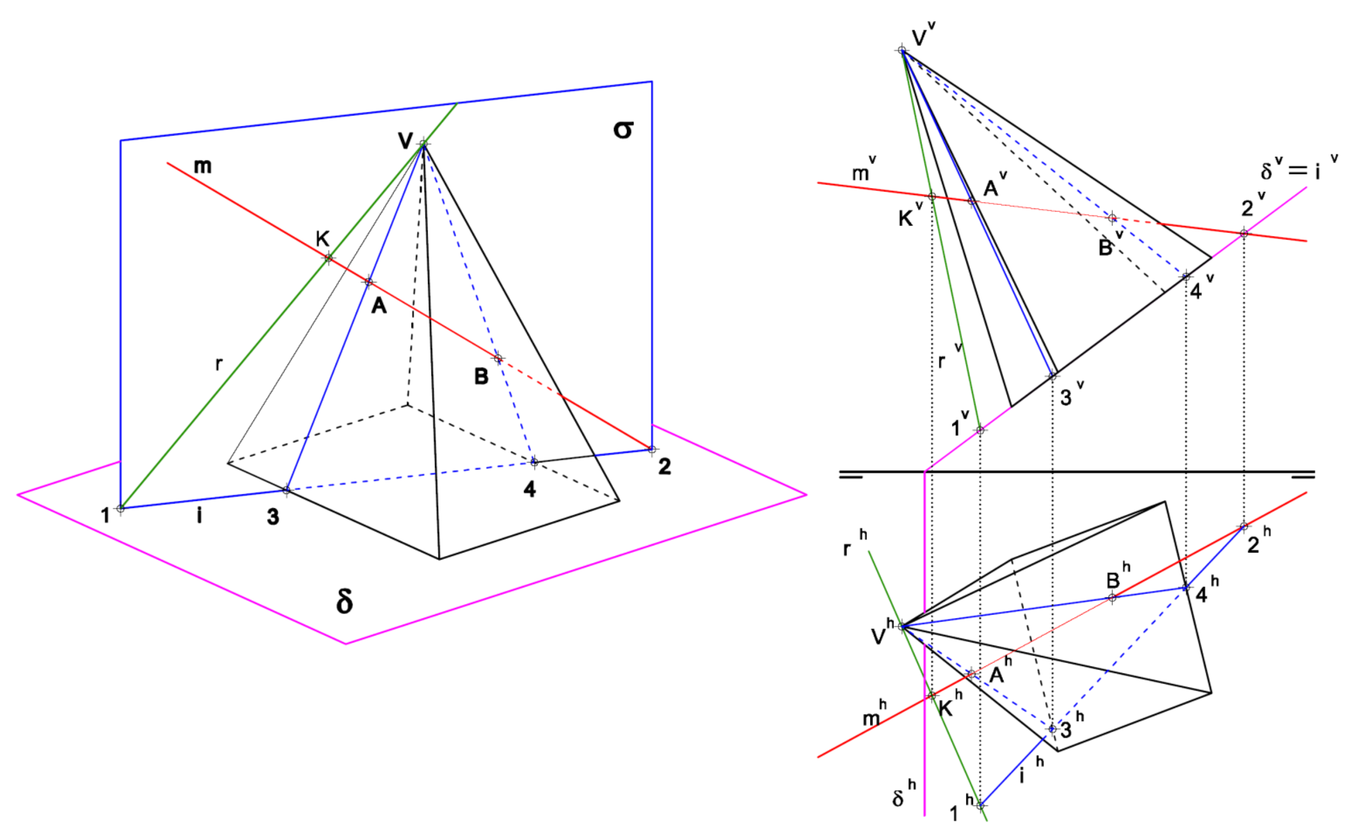


Fig. 10. Intersección entre una recta y una pirámide

2. En caso de que el sólido sea un prisma, es conveniente que el plano σ genere una sección sencilla en el poliedro; para ello, dicho plano quedará determinado por la recta “m” y una recta “e”, la cual es paralela al eje del prisma. Ambas rectas deben ser secantes en un punto K (Fig. 11).
   - Construir por un punto K, perteneciente a la recta “m”, una recta “r” que sea paralela al eje del prisma. Ambas rectas definen el plano σ.
   - Determinar los puntos de intersección (1 y 2) entre las rectas “m” y “r” y el plano δ, base del sólido. La recta definida por estos puntos es la recta de intersección “i” entre los planos σ y δ.
   - Hallar los puntos de corte 3 y 4 entre la recta “i” y la base de la pirámide.

- Trazar rectas paralelas al eje del prisma por los puntos 3 y 4.
- Determinar el punto de corte A entre la recta paralela al eje del sólido construida por 3 y la recta “m” (punto de entrada de “m” en el prisma).
- Determinar el punto de corte B entre la recta paralela al eje del sólido construida por 4 y la recta “m” (punto de salida de “m” en el prisma).
- Estudiar la visibilidad del conjunto.

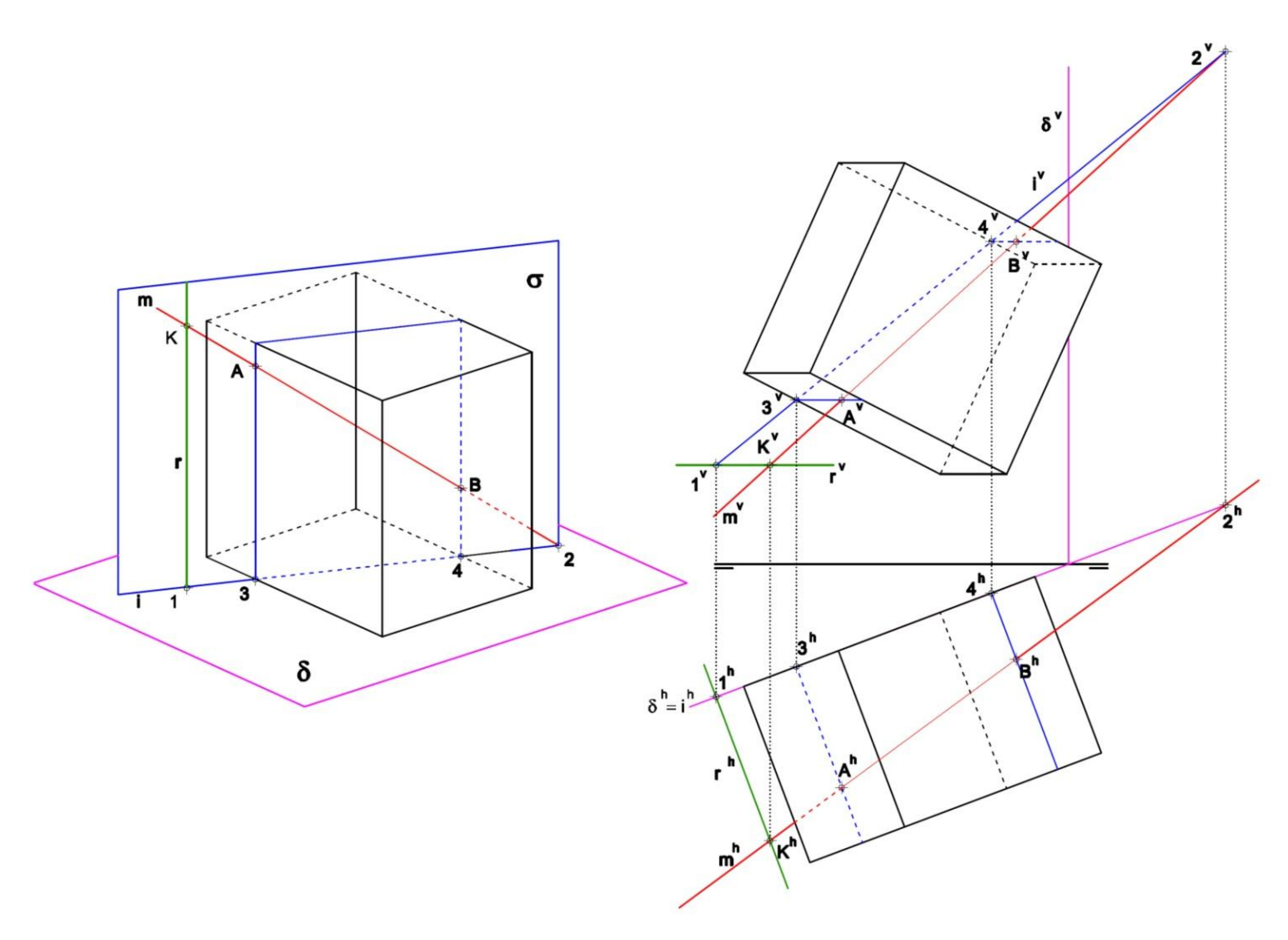


Fig. 11. Intersección entre una recta y un prisma

3. Si se trata de un cono, el plano σ debe generar una sección sencilla en el sólido, a fin de evitar secciones cónicas; para ello, dicho plano quedará determinado por la recta “m” y el vértice V del cono (Fig. 12). El procedimiento es análogo al mostrado en el caso de pirámides.

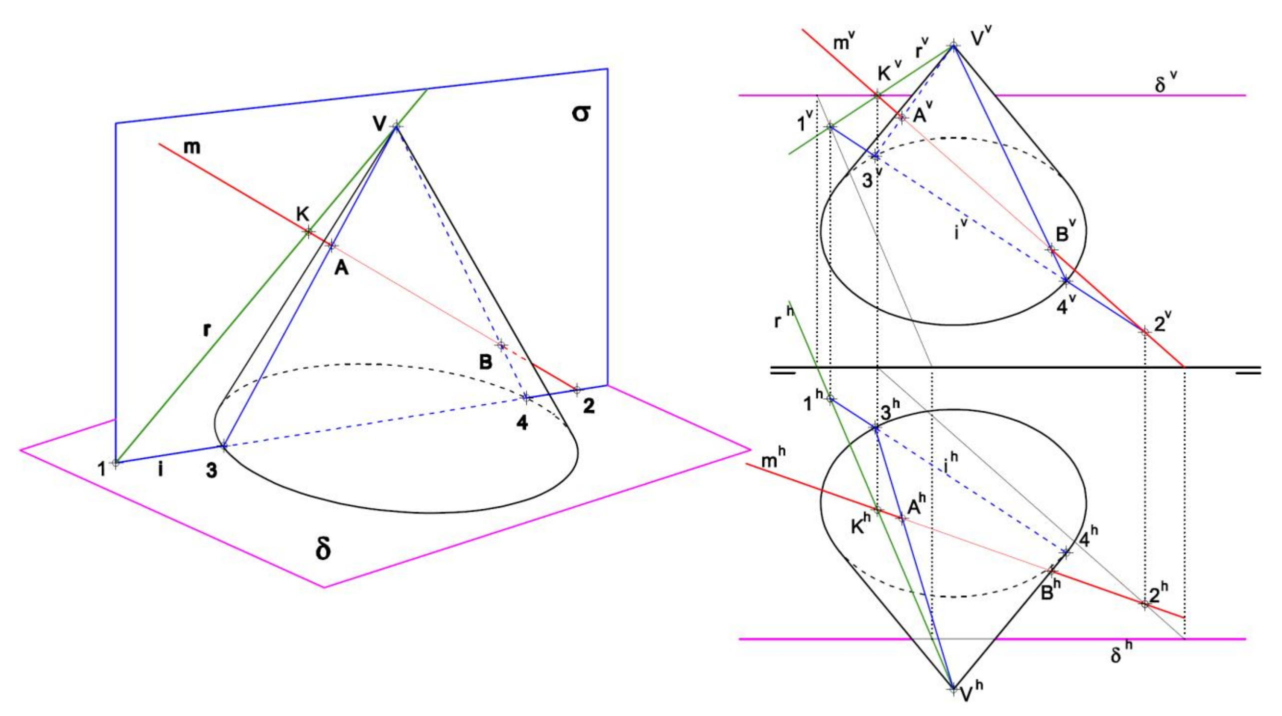


Fig. 12. Intersección entre una recta y un cono

4. De igual manera, si se trata de un cilindro, el plano σ debe generar, a fin de facilitar el trazado, una sección sencilla en el sólido (Fig. 13). El procedimiento a seguir es análogo al mostrado para la intersección entre recta y prisma.

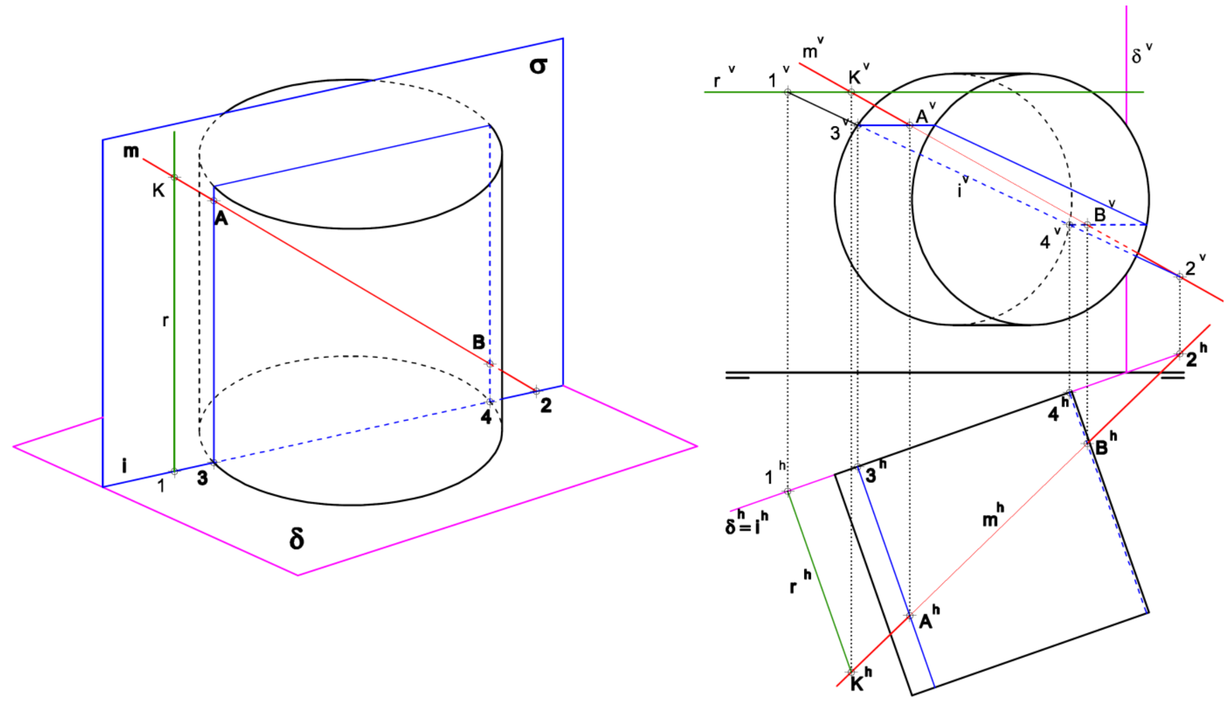


Fig. 13. Intersección entre una recta y un cilindro

5. En el caso de una esfera, resulta conveniente crear un plano proyectante σ que contenga a la recta “m”, ya que de esta manera se facilita notablemente el trazado de la sección correspondiente (Fig. 14); esto en vista de que la sección plana de una esfera será siempre una circunferencia. El procedimiento a seguir es el siguiente:
    - Construir un plano σ que contenga a la recta “m” y sea perpendicular a uno de los planos de proyección.
    - Determinar las proyecciones de la sección producida por σ en la esfera dada. Esta sección se proyecta sobre uno de los planos de proyección como un segmento de recta, mientras que sobre el otro plano de proyección, aparece bien como una elipse (si σ es proyectante vertical o proyectante horizontal) o bien como una circunferencia (si σ es frontal u horizontal).
    - Establecer la visibilidad de la sección.
    - Determinar el punto de corte A entre la sección y la recta “m” (punto de entrada de “m” en la esfera).
    - Determinar el punto de corte B entre la sección y la recta “m” (punto de salida de “m” en la esfera).
    - Estudiar la visibilidad del conjunto.

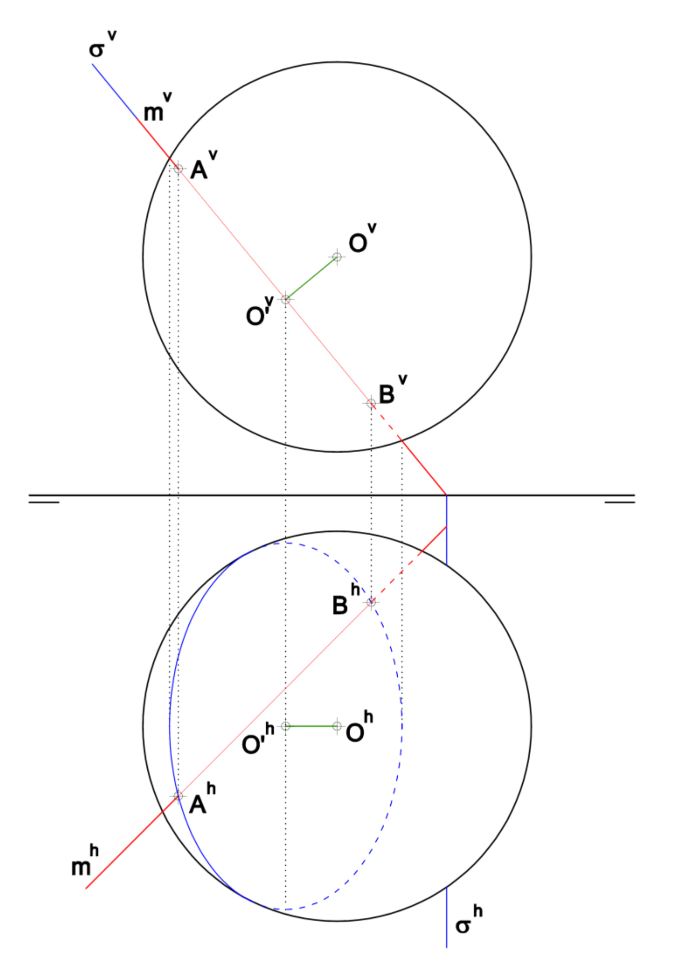


Fig. 14. Intersección entre una recta y una esfera

TIPOS DE INTERSECCIÓN DE SÓLIDOS

La intersección entre cualquier par de sólidos puede ser una o dos poligonales tridimensionales. Esto depende de la posición relativa entre ambos cuerpos. De forma general, puede hacerse la siguiente clasificación:

- *Penetración o intersección completa*: Se produce cuando al introducirse un cuerpo dentro de otro, aquél lo hace totalmente, tal que toda su sección se encuentra en el interior de éste. La intersección está formada por dos poligonales cerradas sin puntos comunes entre sí (una de entrada y una de salida), como se muestra en la Fig. 15. Nótese cómo dos aristas de uno de los prismas no participa en la intersección.

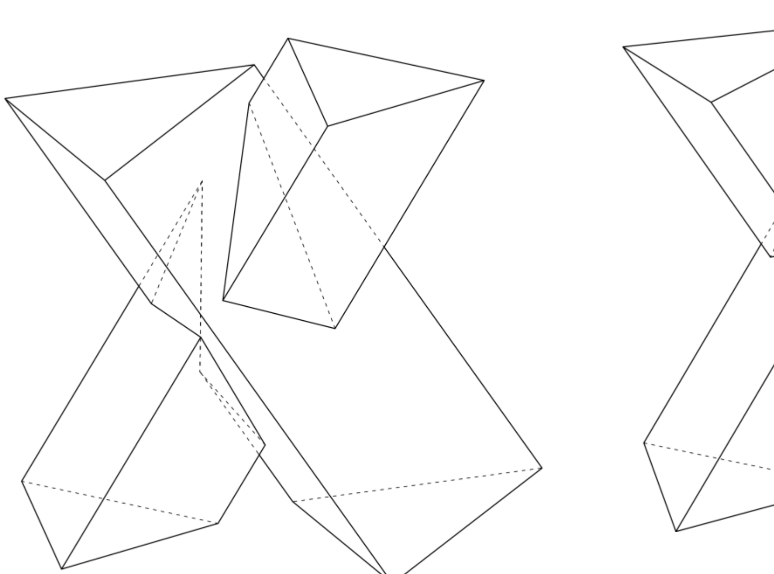


Fig. 15. Penetración o intersección completa

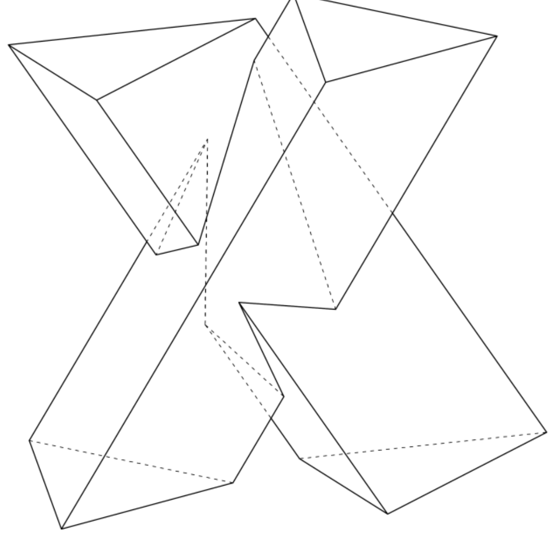


Fig. 16. Mordedura o intersección incompleta

- *Mordedura o intersección incompleta*: Este tipo de intersección se presenta cuando uno de los dos sólidos se introduce parcialmente en el otro sin llegar a abarcar toda su extensión ni ser abarcado por el otro. El resultado es una línea poligonal continua y cerrada (Fig. 16). Nótese cómo una arista de cada sólido no participa en la intersección.
- *Tangencial simple*: Se puede entender como un caso particular de la penetración; se produce en aquella situación en que los sólidos presentan una tangencia en una de sus aristas o generatrices. La intersección está formada por dos líneas poligonales cerradas con un punto en común (punto de tangencia), semejante a un 8 (Fig. 17).

- *Tangencial doble o intersección máxima*: Es un caso de penetración tangencial, aunque esta vez la tangencia se produce en dos costados del sólido penetrante con dos aristas o generatrices del otro cuerpo. El resultado es dos poligonales cerradas con dos puntos en común (Fig. 18).

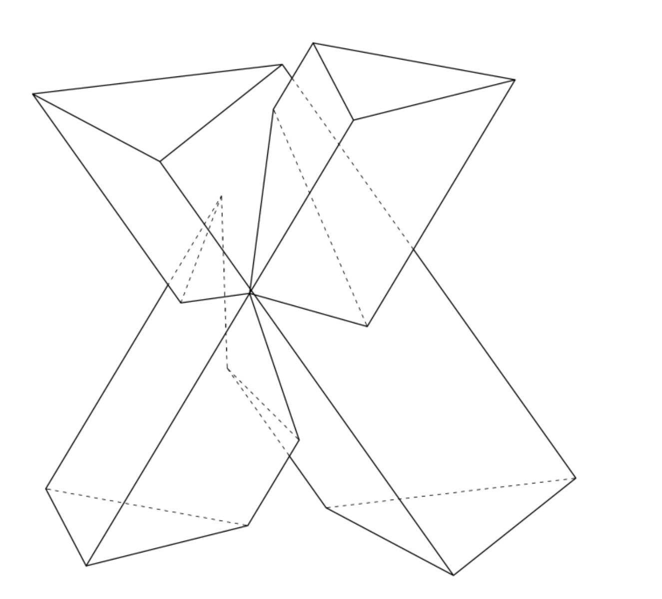


Fig. 17. Intersección tangencial simple

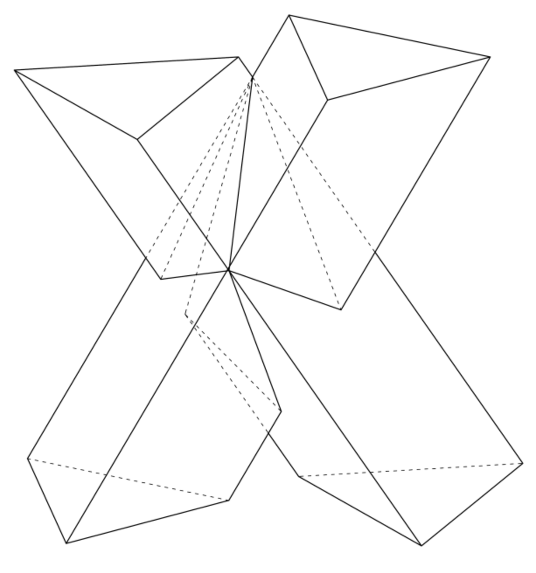


Fig. 18. Intersección tangencial doble

INTERSECCIÓN DE SÓLIDOS MEDIANTE EL MÉTODO DE PLANOS PROYECTANTES

Este método de intersección de sólidos no es más que la repetición del procedimiento de intersección recta-sólido, haciendo que todos y cada uno de los planos secantes sean perpendiculares a uno de los planos de proyección, a fin de simplificar el trazado. Como puede deducirse de lo anterior, el procedimiento se aplica generalmente a sólidos en cuya superficie existen rectas, vale decir, poliedros y sólidos curvos simplemente reglados.

De acuerdo con Rondón y Téllez (1985), el método es

> Aplicable a cualquier par de sólidos, consiste en que los planos que se definan para hallar la intersección de aristas de un sólido en el otro y viceversa, sean planos proyectantes que por lo característico de sus posiciones, facilitan la obtención de los puntos que conforman las secciones

planas correspondientes. Todos los puntos de intersección hallados y lógicamente unidos, determinan la intersección entre ambos cuerpos (p. 178).

Es preciso resaltar que la *unión lógica* de los puntos señalados, así como la obtención de la visibilidad del conjunto, requiere de una correcta interpretación espacial del problema por parte del estudiante, ya que no existe manera de sistematizar dicha unión (al menos usando este método). De forma general, el método de planos proyectante involucra los siguientes pasos:

1. Realizar el análisis espacial del conjunto, es decir, visualizar, a partir de la representación diédrica, la posición relativa de ambos cuerpos, determinando de manera aproximada el tipo de intersección resultante (penetración, mordedura, tangencial simple o tangencial doble) y los posibles planos proyectantes a ser construidos
2. Descartar, si existen, aquellas aristas o generatrices de un sólido que no penetran al otro y viceversa (siempre que la posición de los cuerpos permita hacerlo de manera directa, es decir, por inspección).
3. Construir planos proyectantes que contengan a una arista o generatriz de uno de los sólidos y determinar la sección que produce dicho plano en el otro.
4. Hallar los puntos de corte entre la arista o generatriz seleccionada y la sección producida (puntos de entrada y salida de la arista o generatriz). Es posible que ambos puntos se reduzcan a uno en los casos de tangencia simple y tangencia doble.
5. Repetir los pasos 3 y 4 cuantas veces sea necesario.
6. Unir los puntos de entrada entre sí, obteniéndose de esta manera la poligonal de entrada; en el caso de mordedura sólo existe una poligonal.
7. Unir los puntos de salida entre sí, obteniéndose de esta manera la poligonal de salida (ambas poligonales resultan ser una sola para el caso de mordedura). Un par de puntos de la poligonal se pueden unir sólo si pertenecen a una misma cara de uno de los sólidos involucrados.
8. Establecer la visibilidad de ambas poligonales.

A continuación, se presenta un ejemplo ilustrado en perspectiva y en representación diédrica. En él se expone la secuencia de pasos requeridos para la resolución de la intersección entre dos prismas de base cuadrangular, uno de los cuales (base ABCD) tiene su eje perpendicular al plano horizontal de proyección, en tanto que el otro (base PQRS) tiene su eje paralelo a dicho plano (Fig. 19). No se incluye la proyección vertical del conjunto en la imagen espacial para facilitar la visualización del ejemplo.

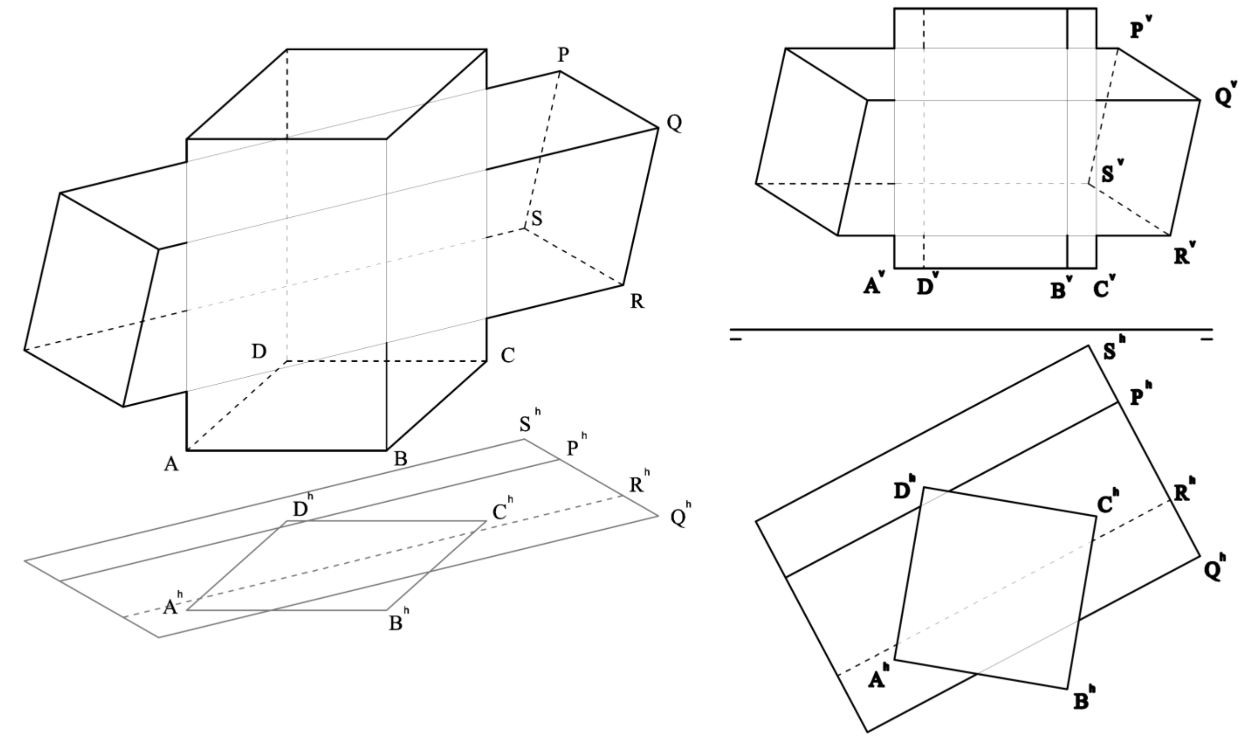


Fig. 19. Intersección de dos prismas. Planteamiento

La proyección sobre el plano horizontal de los sólidos involucrados permite - en vista de que el eje de uno de ellos es una recta de pié - observar a priori que la intersección resultante es del tipo *mordedura*, dado que la aristas laterales correspondientes a los vértices S y B (una en cada sólido) no tienen puntos de entrada y salida en el otro poliedro. También se puede predecir que la poligonal de intersección se confundirá con el contorno del poliedro de base ABCD en proyección horizontal.

Como primer paso se ha construido el plano proyectante horizontal que contiene a la arista lateral correspondiente al vértice Q. Dicho plano produce la sección coloreada en el prisma ABCD, la cual se obtiene a partir de la proyección horizontal por el corte entre la traza horizontal del plano proyectante (confundida con la proyección horizontal de la arista

correspondiente a Q) y la proyección de la base del prisma ABCD. La sección así generada resulta ser un rectángulo con lados verticales o de pié, dada la posición de dicho prisma (Fig. 20).

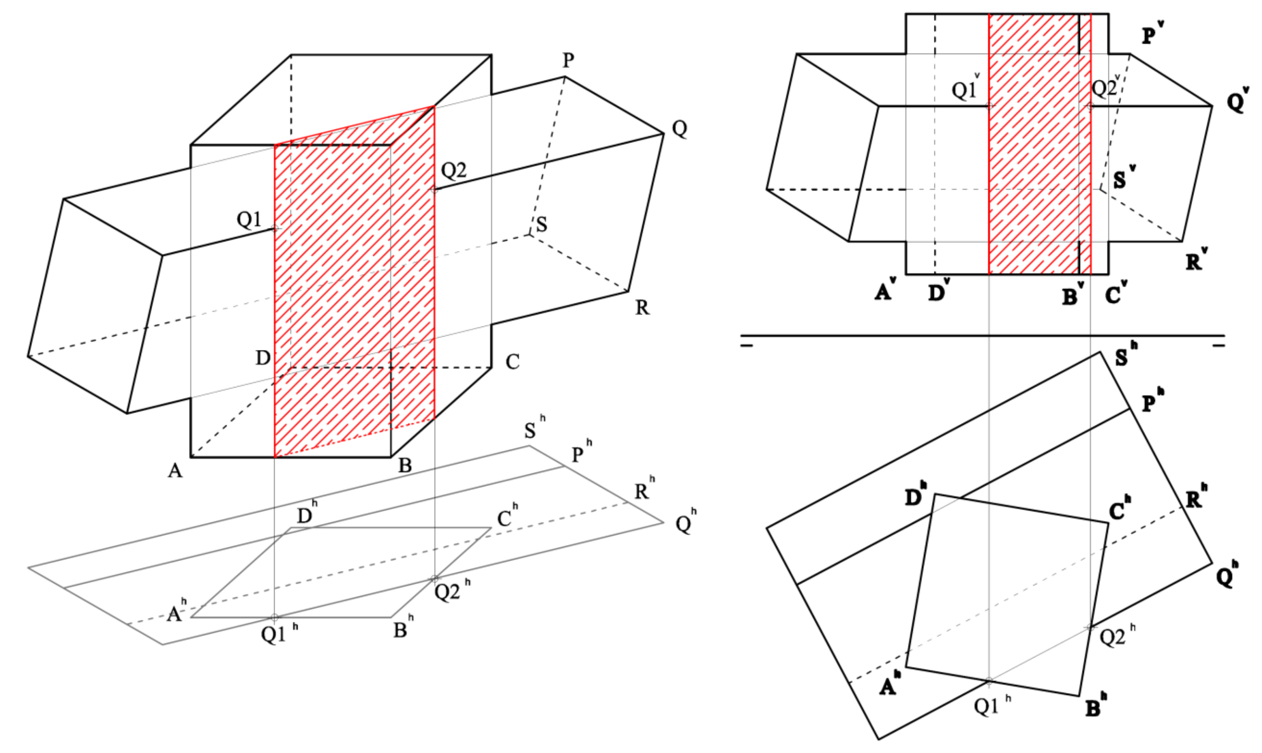


Fig. 20. Intersección de dos prismas. Primer paso

Los cortes entre la arista correspondiente a Q y los bordes de la sección mencionada constituyen los puntos de entrada y salida de dicha arista en el otro sólido (Q1 y Q2). Su visibilidad queda determinada por la visibilidad de la sección, tal y como se muestra en la Fig. 20: en vista de que los lados verticales de la sección son visibles en la proyección vertical, los puntos Q1 y Q2 también lo son, de tal forma que la arista correspondiente a Q entra y sale del otro sólido de manera visible en el alzado.

Seguidamente y de manera análoga, se ha realizado la misma operación con la arista lateral correspondiente al vértice R, con lo cual se obtienen los puntos R1 y R2 y la respectiva visibilidad de la arista en cuestión, como se muestra en la Fig. 21: R1 es un punto invisible en la proyección vertical, en tanto que R2 es un punto visible en dicha proyección.

La obtención de los puntos P1 y P2 se realiza siguiendo un procedimiento similar (Fig. 22). Como puede observarse, ambos son invisibles en la proyección vertical del conjunto, ya que se encuentran sobre caras también invisibles del prisma de base ABCD.

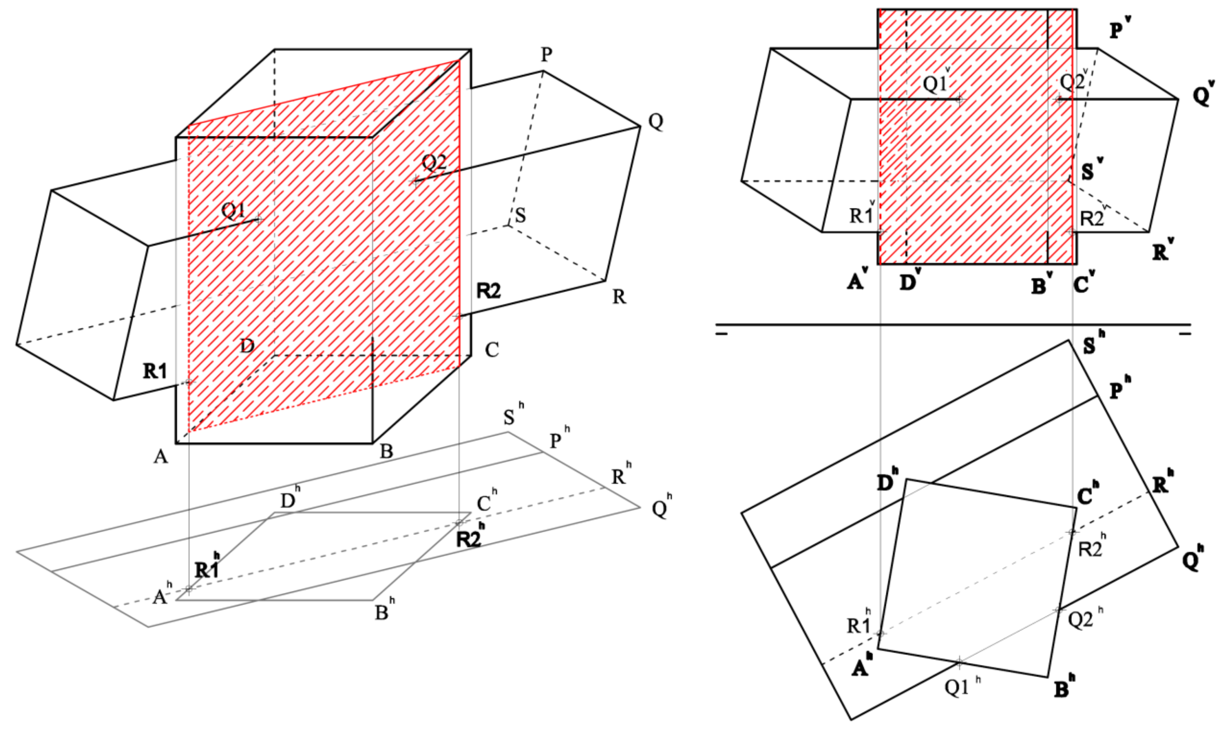


Fig. 21. Intersección de dos prismas. Método del plano proyectante. Segundo paso.

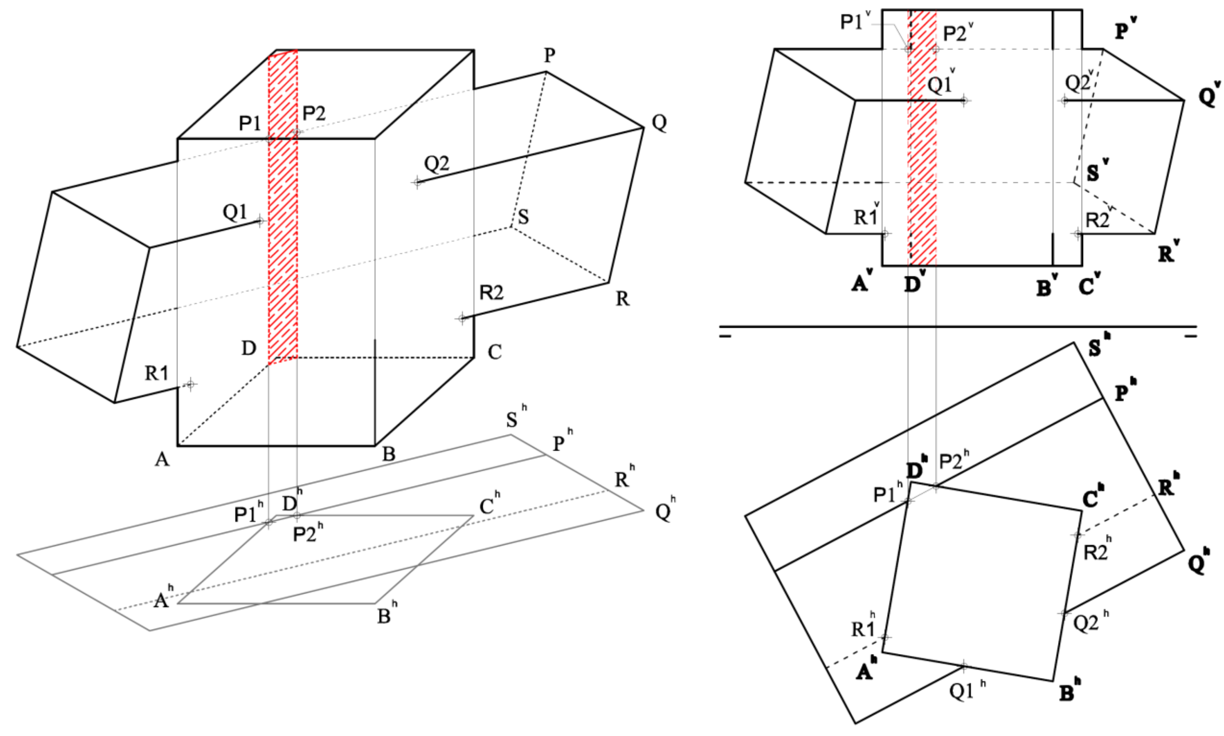


Fig. 22. Intersección de dos prismas. Método del plano proyectante. Tercer paso.

El segundo grupo de puntos está constituido por las intersecciones entre las aristas del prisma de base ABCD y el otro sólido (puntos de entrada y salida de las aristas correspondientes a los vértices A, C y D).

Siendo las aristas laterales que corresponden a los vértices A, C y D rectas de pié, queda claro que existen infinitos planos proyectantes horizontales que pueden ser construidos de tal forma que contengan a cada una de dichas aristas. De entre todas estas posibilidades se han tomado los planos proyectantes horizontales que resultan paralelos a la base ABCD, lo cual facilita en gran medida el trazado de las secciones resultantes que se generan en el prisma PQRS. De esta manera, la sección generada por el plano proyectante horizontal que contiene a la arista lateral correspondiente al vértice A, es semejante a la base ABCD (Fig. 23). Los puntos A1 y A2 pueden ser determinados en proyección vertical en los cortes entre dicha sección y la propia arista lateral, así como su respectiva visibilidad.

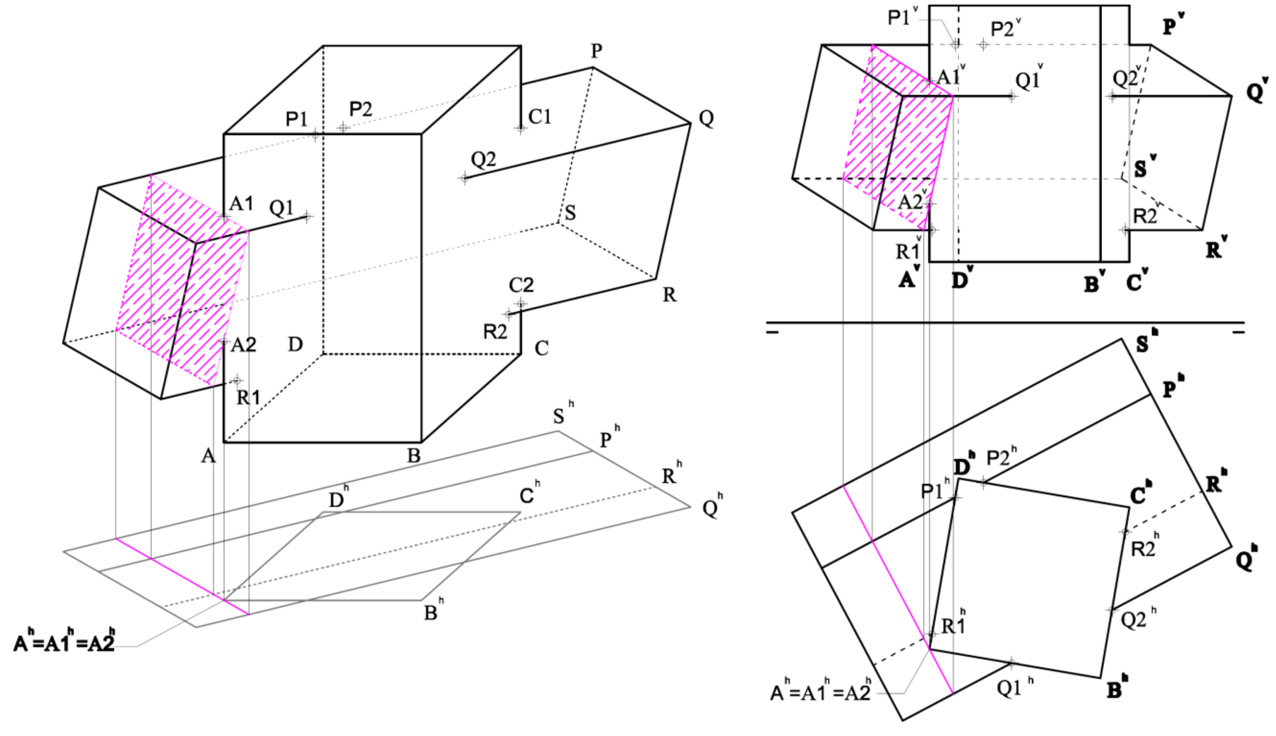


Fig. 23. Intersección de dos prismas. Método del plano proyectante. Cuarto paso

Como quinto y sexto paso, se han determinado las secciones producidas por los planos proyectantes paralelos a la base ABCD y que contienen a las aristas C y D (Fig. 24 y Fig. 25), atendiendo a las mismas consideraciones del paso anterior. Esto ha dado como resultado los puntos C1, C2, D1 y D2 y la respectiva visibilidad en proyección vertical.

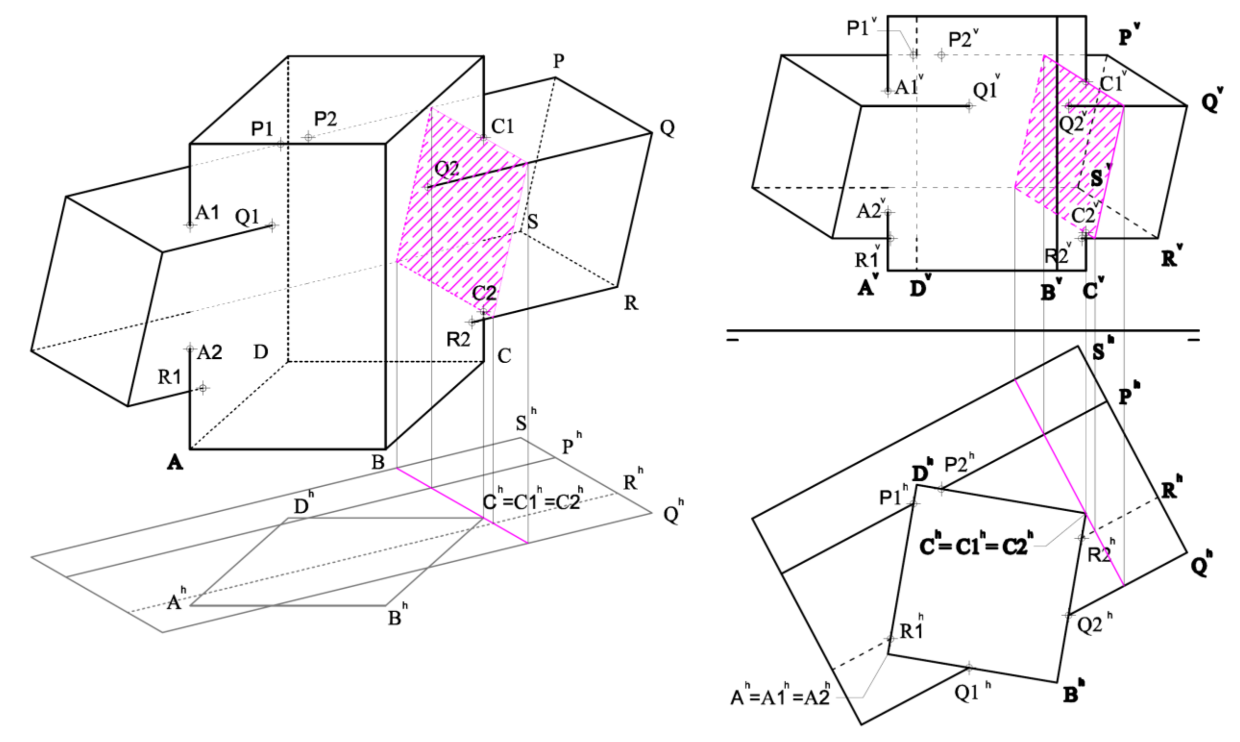


Fig. 24. Intersección de dos prismas. Método del plano proyectante. Quinto paso

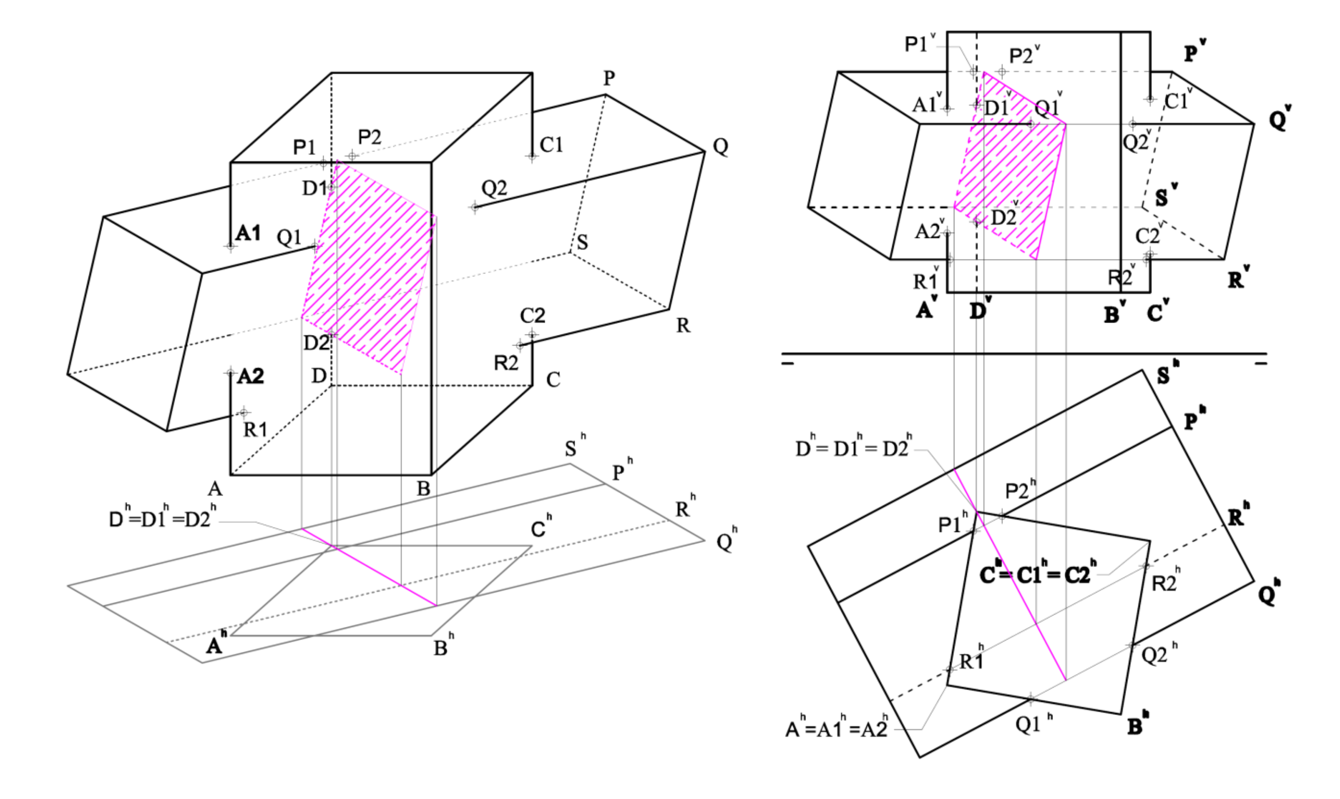


Fig. 25. Intersección de dos prismas. Método del plano proyectante. Sexto paso.

Finalmente, una vez determinados todos los puntos de entrada y salida de las aristas laterales involucradas en la intersección (todas las de ambos sólidos, excepto las correspondientes a los vértices B y S), se ha procedido a su unión mediante líneas rectas, tomando en cuenta que (Fig. 26):

- La intersección resultante es del tipo *mordedura*, por lo que existe una única poligonal.
- Para unir dos puntos de intersección debe asegurarse que ambos pertenecen a una misma cara.
- Un segmento de la poligonal es visible si y sólo si sus extremos (puntos de intersección) también lo son.
- Un segmento de la poligonal es invisible si al menos uno de sus extremos también lo es.
- La percepción espacial, la lógica y el sentido común juegan un papel fundamental.

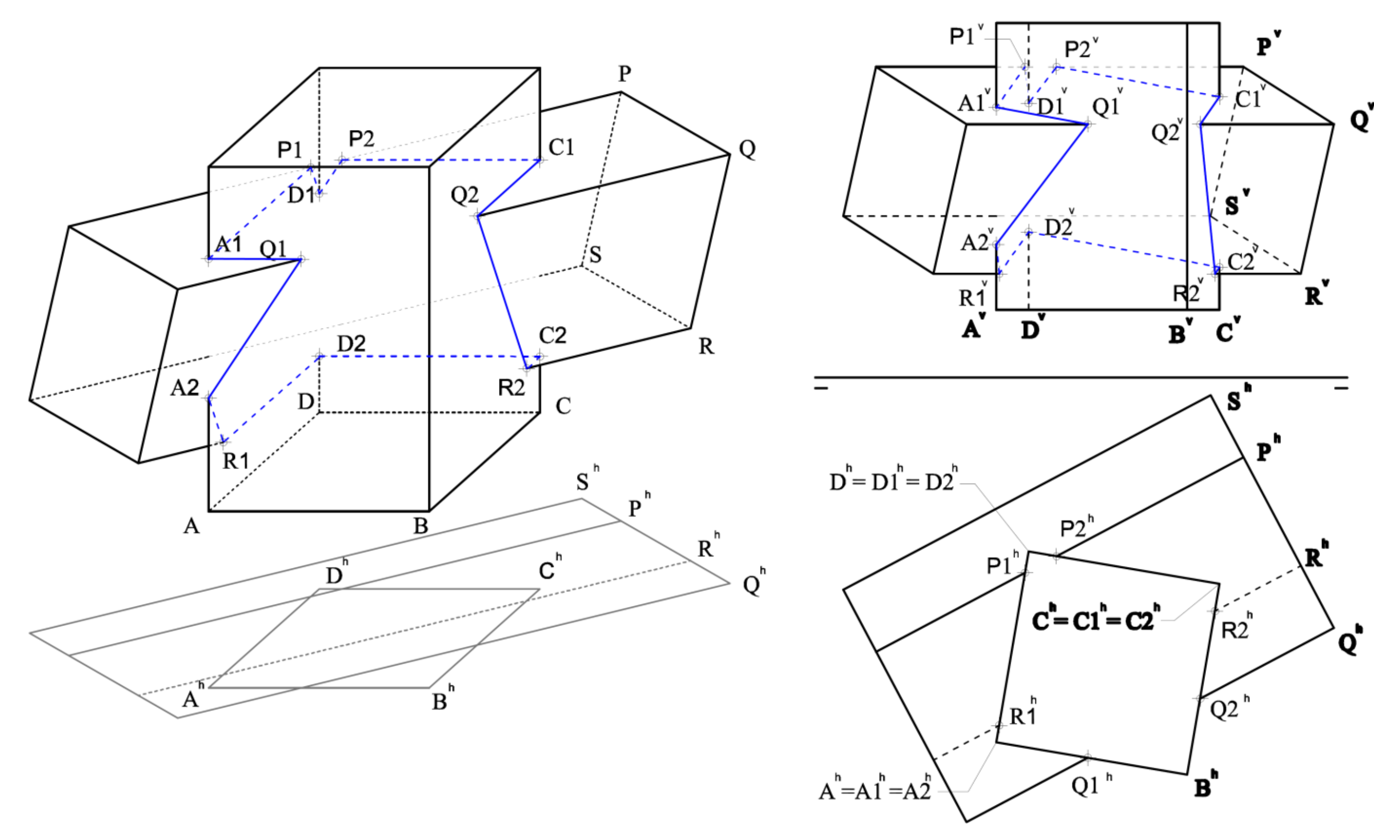


Fig. 26. Intersección de dos prismas. Método del plano proyectante. Resultado final.

Las figuras 27 a 32 muestran un ejemplo de intersección entre dos pirámides.

Observando la Fig. 27 puede concluirse que el uso de planos secantes perpendiculares al plano horizontal permite una solución relativamente simple y rápida del problema, dado que el eje de la pirámide de base ABCD es una recta de pié. Por otra parte, de la inspección de la figura señalada es posible determinar que la arista lateral CV no participa en la intersección de ambos sólidos, ya que esta pasa por encima de la arista RW, la cual es, a su vez, la más externa de las aristas laterales de la otra pirámide. Por tanto, las posibilidades para el tipo de intersección se reducen a mordedura y tangencia simple (ver Fig. 16 y 17).

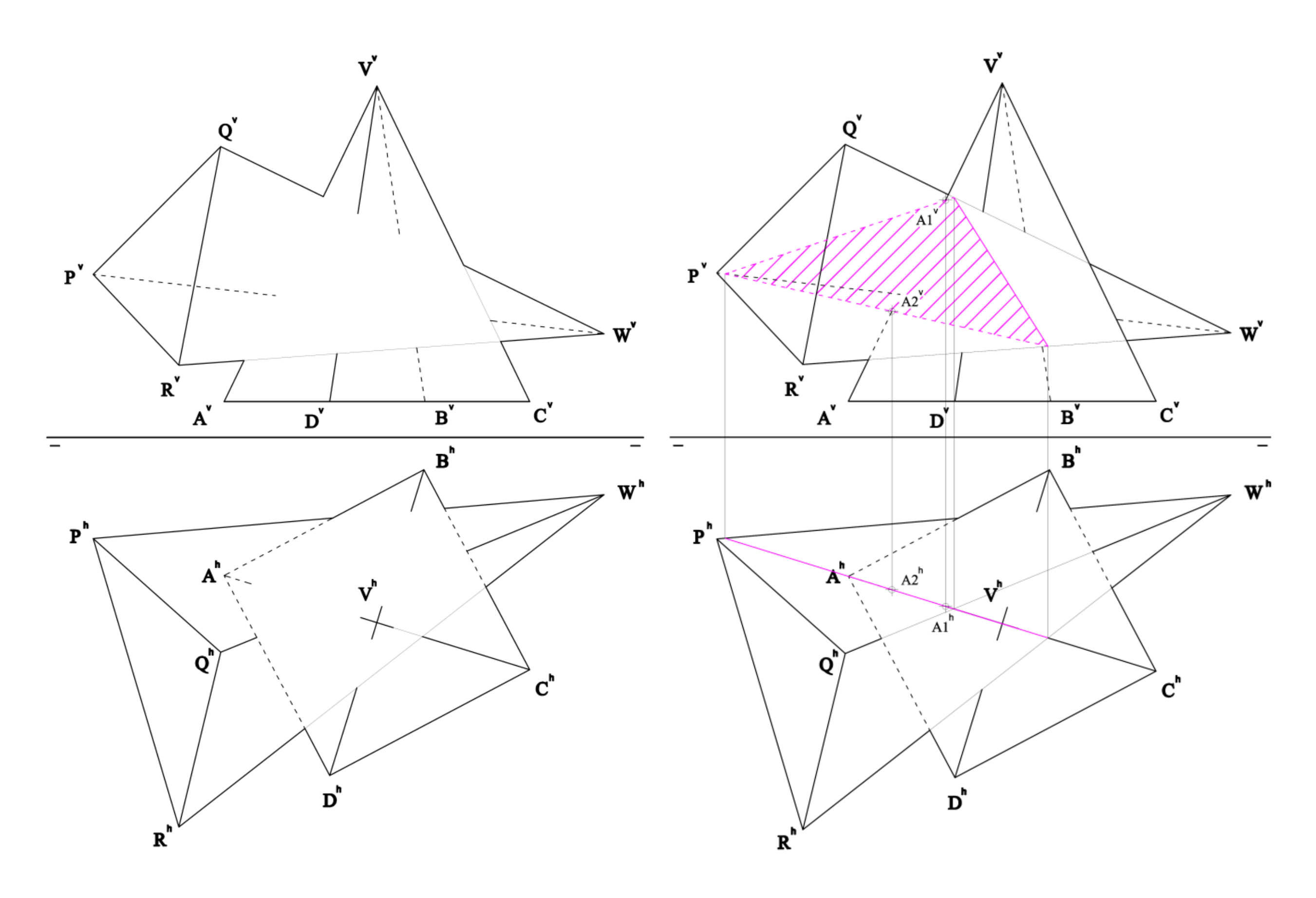


Fig. 27. Intersección de dos pirámides. Método del plano proyectante. Planteamiento.

Fig. 28. Intersección de dos pirámides. Método del plano proyectante. Primer paso.

Como primera operación, se ha construido el plano proyectante horizontal que pasa por la arista lateral AV, el cual produce una sección de forma triangular en la pirámide de base PQR. Los cortes entre esta sección y la arista AV producen A1 y A2, puntos de entrada y salida de dicha arista en la otra pirámide (Fig. 28).

Ambos puntos resultan ser invisibles en proyección vertical, por pertenecer a dos caras invisibles de la pirámide PQR (PQW y PRW) en dicha proyección. Por otra parte, en la proyección horizontal, A1 es visible (la cara PQW es visible en la proyección horizontal), en tanto que A2 es invisible (la cara PRW es invisible en proyección horizontal).

El siguiente paso ha sido la construcción del plano proyectante horizontal que pasa por las aristas laterales BV y DV, el cual, como se muestra en la Fig. 29, produce una sección triangular que toca en un punto a la arista BV (justo en el corte del plano construido con la arista PW), lo cual indica que este resultado es tanto punto de entrada como de salida de la arista BV (B1=B2), y por lo tanto, un punto doble o punto de tangencia entre ambos sólidos. El punto B1=B2 es entonces común a las aristas BV y PW; es invisible en proyección vertical y visible en proyección horizontal.

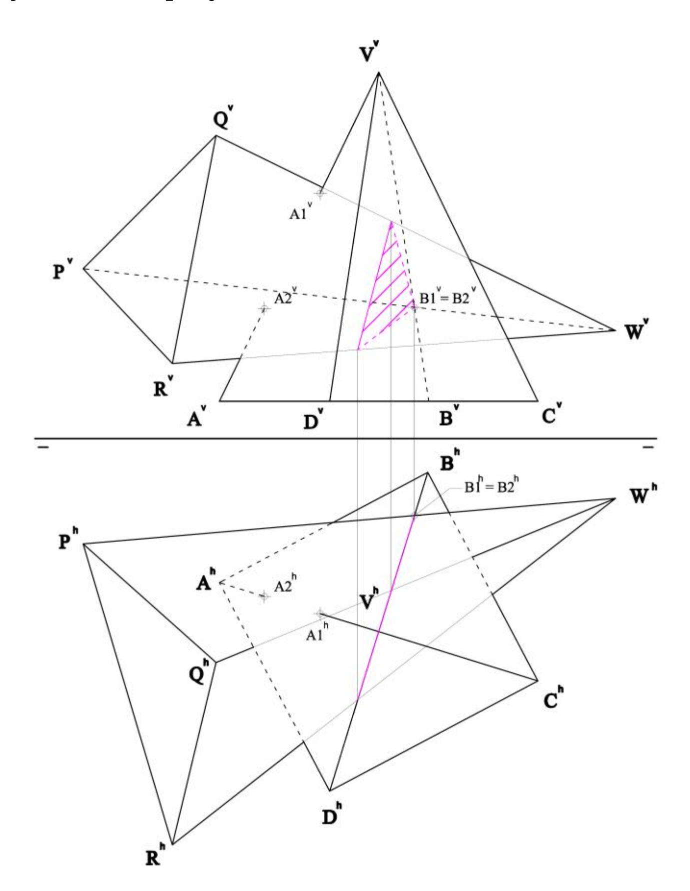


Fig. 29. Intersección de dos pirámides. Método del plano proyectante. Segundo paso.

Asimismo, en la Fig. 29 puede observarse cómo la arista DV no corta a la sección generada, por lo que se concluye que dicha arista no participa, al igual que CV, en la intersección.

Para encontrar los puntos de entrada y salida de la arista lateral RW, se ha construido un plano proyectante horizontal que produce una sección de forma trapezoidal en la pirámide de base ABCD.

Como puede observarse en la Fig. 30, el punto R2 es visible en proyección vertical, ya que la cara a la cual pertenece (ADV) es visible en esa proyección. En cambio, el punto R1es invisible en el alzado, dado que la cara BCV también lo es. En la proyección horizontal o planta, ambos puntos resultan ser visibles, pues son visibles las caras ADV y BCV en dicha proyección.

De manera análoga, los puntos Q1 y Q2 se obtuvieron mediante la construcción del plano proyectante horizontal que pasa por la arista QW. El resultado y la correspondiente visibilidad se muestran en la Fig. 31.

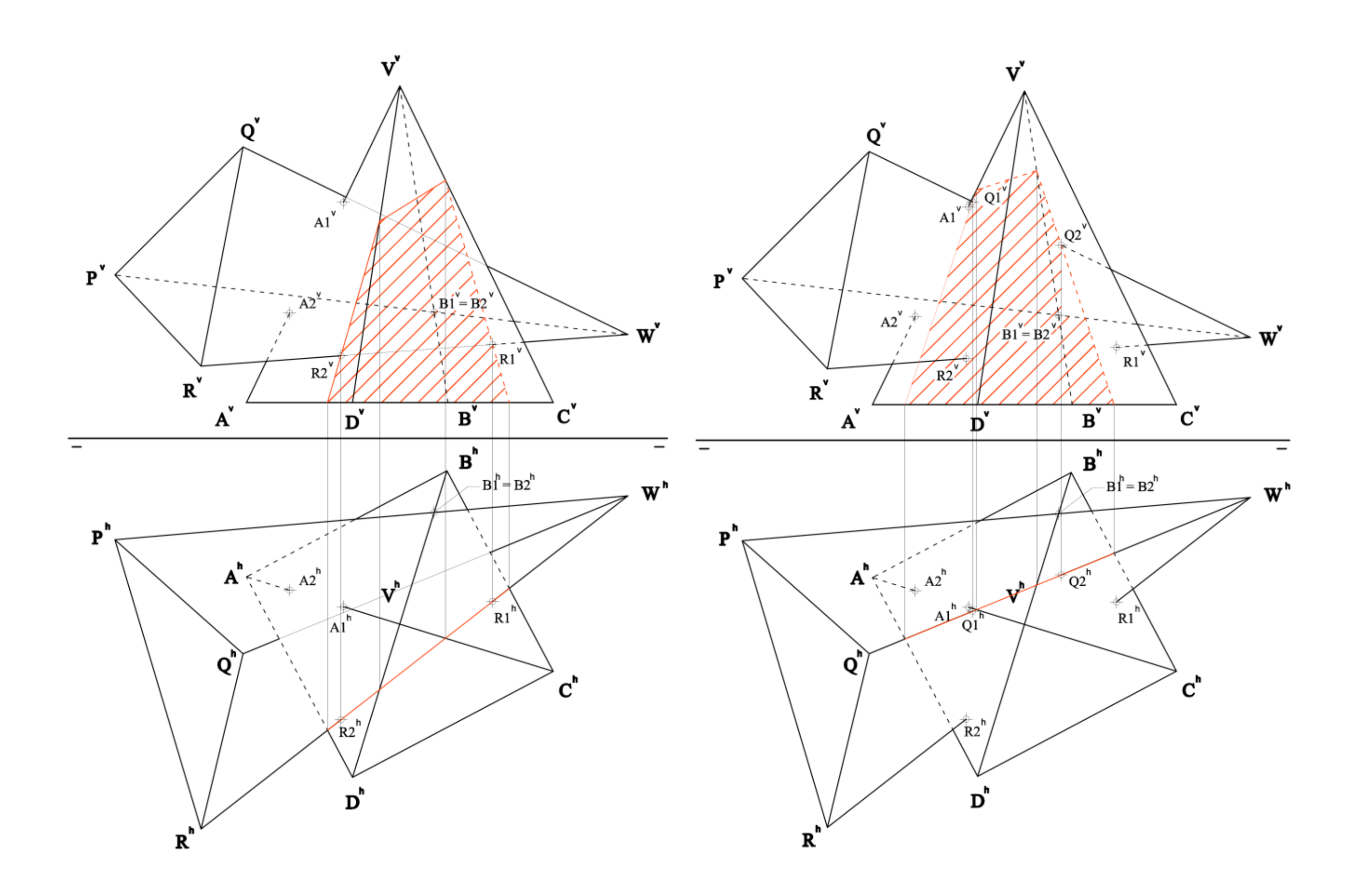


Fig. 30. Intersección de dos pirámides. Método del plano proyectante. Tercer paso.

Fig. 31. Intersección de dos pirámides. Método del plano proyectante. Cuarto paso.

Finalmente, se ha procedido a la unión de los puntos de intersección encontrados mediante líneas rectas, tomando en cuenta que (Fig. 32):

- La intersección resultante es del tipo *tangencia simple*, por lo que existen dos poligonales con un punto doble (B1=B2).
- Para unir dos puntos de intersección debe asegurarse que ambos pertenecen a una misma cara.
- Un segmento de la poligonal es visible si y sólo si sus extremos (puntos de intersección) también lo son.
- Un segmento de la poligonal es invisible si al menos uno de sus extremos también lo es.
- La percepción espacial, la lógica y el sentido común juegan un papel fundamental.

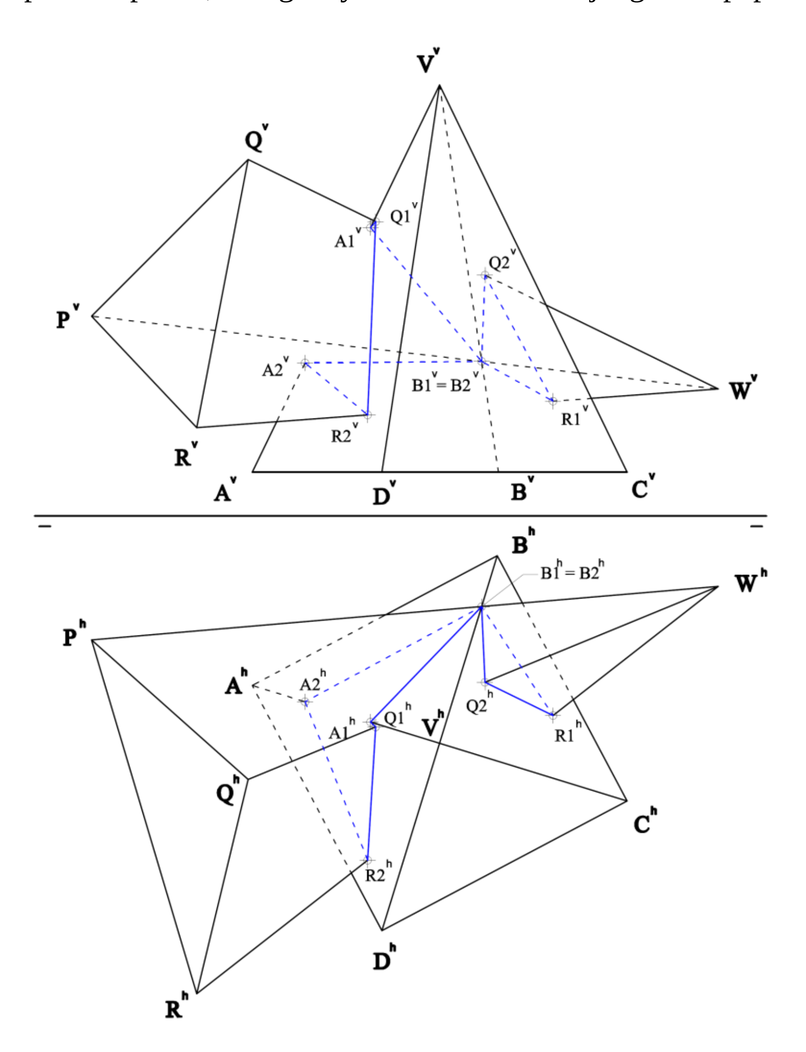


Fig. 32. Intersección de dos pirámides. Método del plano proyectante. Resultado final.

El método de plano proyectante es especialmente útil en la determinación de intersecciones de sólidos en las cuales se involucran cuerpos de revolución de doble curvatura como la esfera, sobre todo si los planos secantes producen paralelos y/o meridianos en estos cuerpos, ya que el trazado de estas líneas no reviste mayor dificultad.

A continuación se describe el proceso de solución del problema de intersección entre un prisma de base triangular y una esfera. Como puede apreciarse en la Fig. 33, el eje del prisma está en posición horizontal, de tal manera que los planos proyectantes a ser construidos deben ser horizontales, en aras de simplificar el procedimiento. Por otra parte, resulta conveniente iniciar con la obtención de los puntos de entrada y salida (si existen) de las aristas latearles del prisma en la esfera; de esta manera se determina el tipo de intersección entre ambos cuerpos.

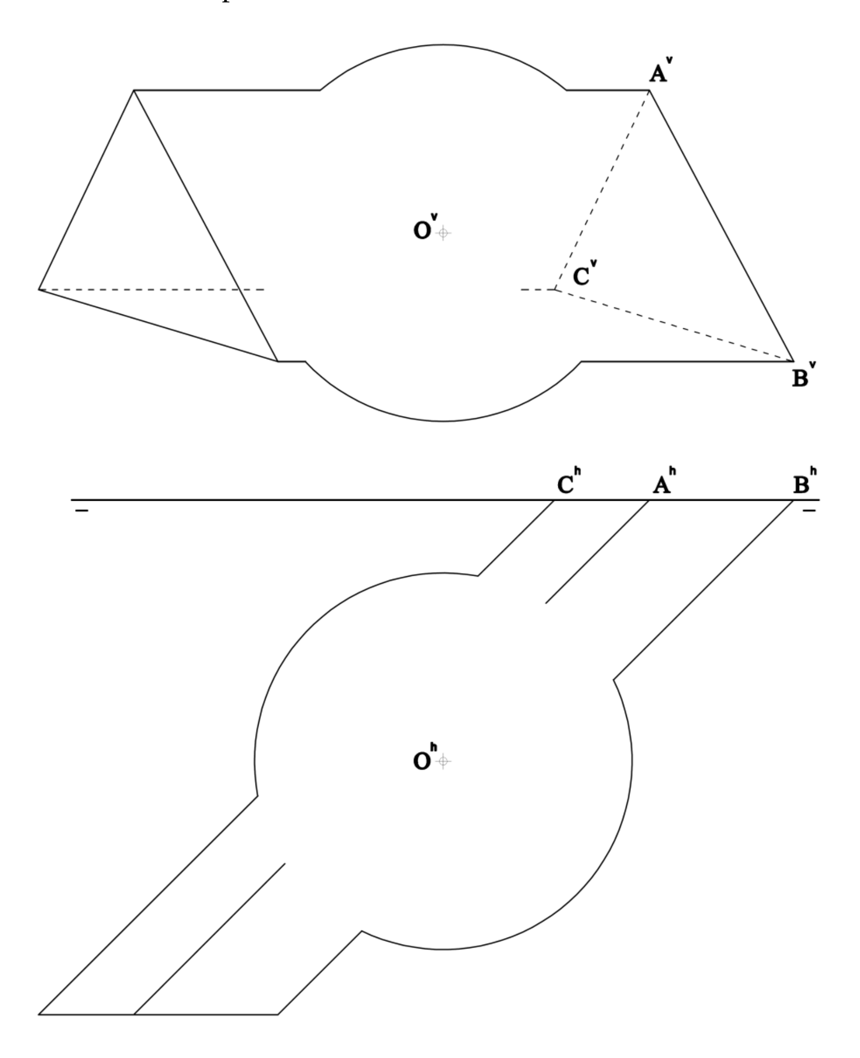


Fig. 33. Intersección de esfera y prisma. Método del plano proyectante. Planteamiento.

En primer lugar, se han construido los planos horizontales σ_1, σ_2 y σ_3, los cuales contienen a las aristas laterales correspondientes a los vértices A, C y B, respectivamente. Dichos planos producen paralelos en la esfera (Fig. 34), los cuales se cortan con las aristas laterales pertinentes produciendo las proyecciones horizontales de los puntos A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 y C_2. Los puntos A_1, B_1 y C_1 se encuentran en la *poligonal de entrada* del prisma en la esfera, en tanto que A_2, B_2 y C_2 se sitúan sobre la *poligonal de salida*. Con esto, es fácil deducir que la intersección entre los sólidos es del tipo *penetración*, ya que todas las aristas laterales del prisma entran y salen de la esfera.

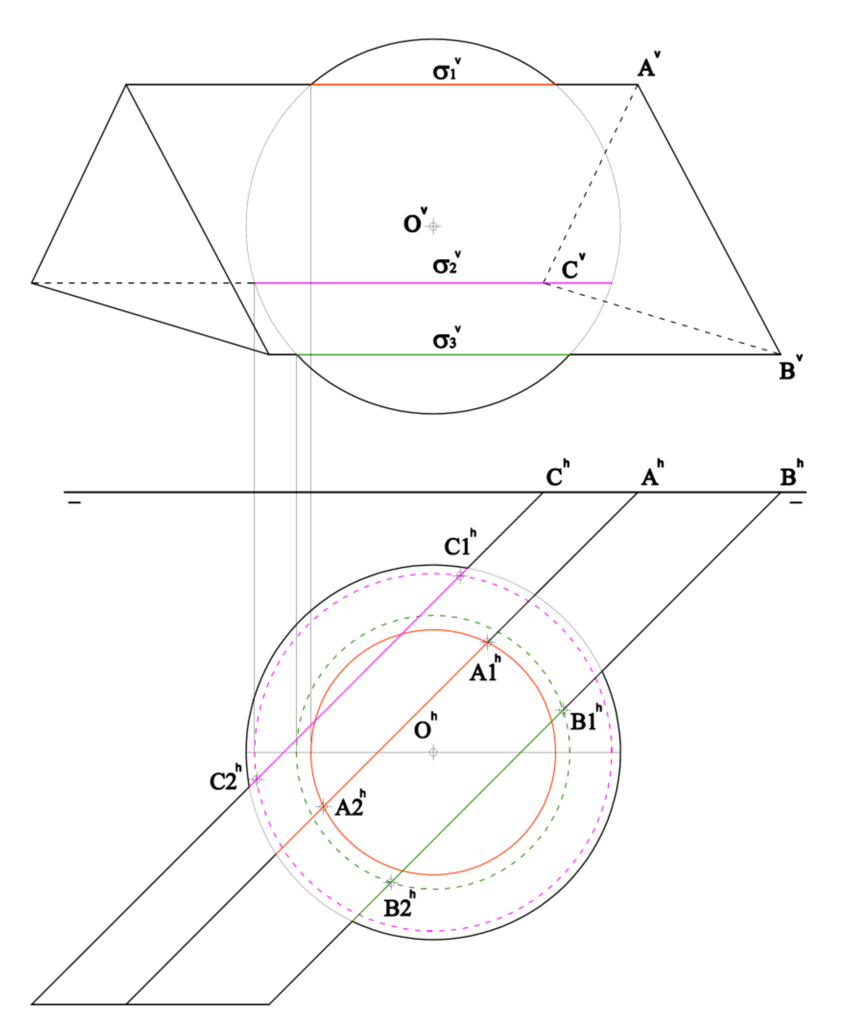


Fig. 34. Intersección de esfera y prisma. Método del plano proyectante. Primer paso.

Una vez determinada la proyección vertical de los puntos A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 y C_2, es importante determinar su visibilidad, para lo cual es preciso establecer la visibilidad de la arista que los contiene y su ubicación con respecto al ecuador y al meridiano frontal de la

esfera. Así por ejemplo, el punto A_1 – situado en una arista del prisma que es visible en ambas proyecciones diédricas - es invisible en proyección vertical, ya que se encuentra detrás (con menor vuelo) que el meridiano frontal de la esfera; en cambio, ese mismo punto resulta visible en la proyección horizontal, puesto que se ubica por encima (con mayor cota) que el ecuador de la esfera (Fig. 35). Realizado este análisis para todos los puntos se obtiene que: A_2 es visible en ambas proyecciones; B_1es invisible en ambas proyecciones; B2 es visible en vertical e invisible en horizontal; yC_1 y C2 son invisibles en ambas proyecciones.

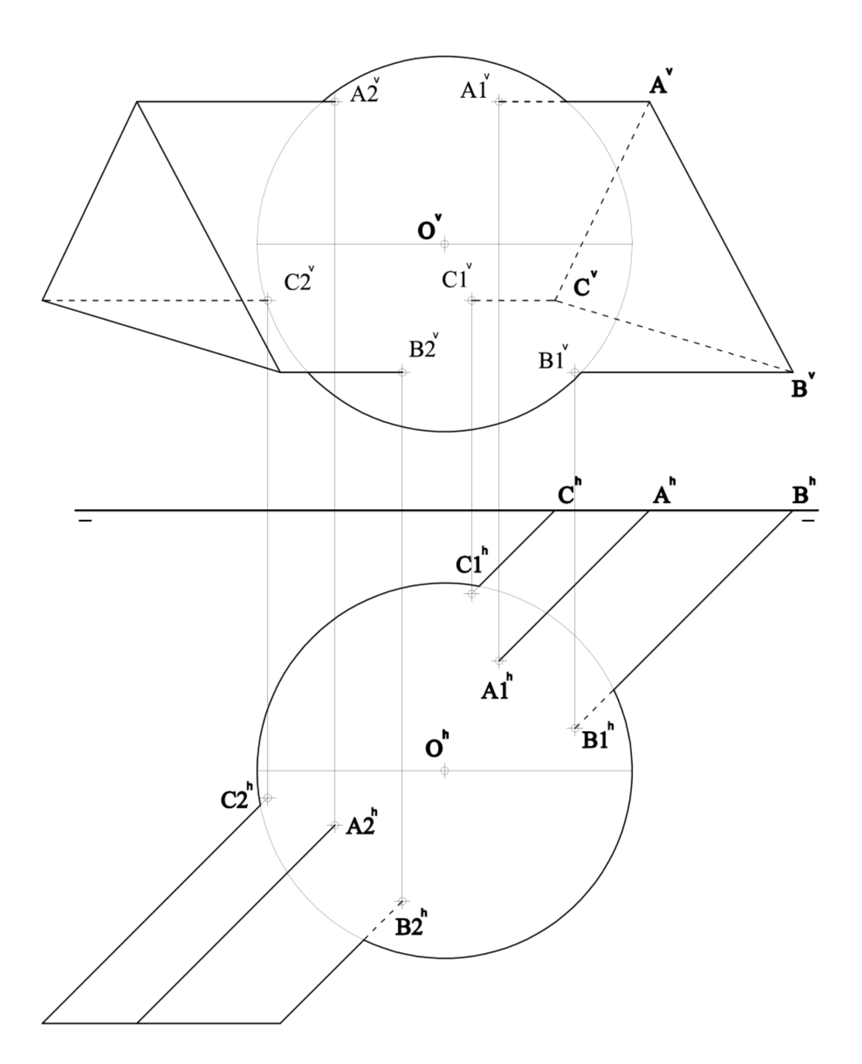


Fig. 35. Intersección de esfera y prisma. Método del plano proyectante. Primer paso (Visibilidad).

Como puede notarse, los puntos A_1, B_1 y C_1 se encuentran sobre la *poligonal de entrada*, en tanto que los puntos A_2, B_2 y C_2 pertenecen a la *poligonal de salida*. Ambas poligonales

están compuestas por tres segmentos de circunferencia, producto de la intersección entre cada una de las caras laterales del prisma y la esfera.

En vista de lo anterior, el trazado de las proyecciones diédricas de las poligonales de intersección resultantes, requiere del conocimiento de una buena cantidad de puntos pertenecientes a ellas, a fin de lograr una buena aproximación en el uso de plantillas de curvas (trazado manual) o en la aplicación de herramientas tipo *spline* (trazado mediante CAD). Por ello, se requiere de la construcción de nuevos planos proyectantes que, en el ejemplo descrito, deben ser paralelos al eje del prisma, tal como se muestra en las figuras 36 y 37 (planos σ_4, σ_5, σ_6, σ_7 y σ_8).

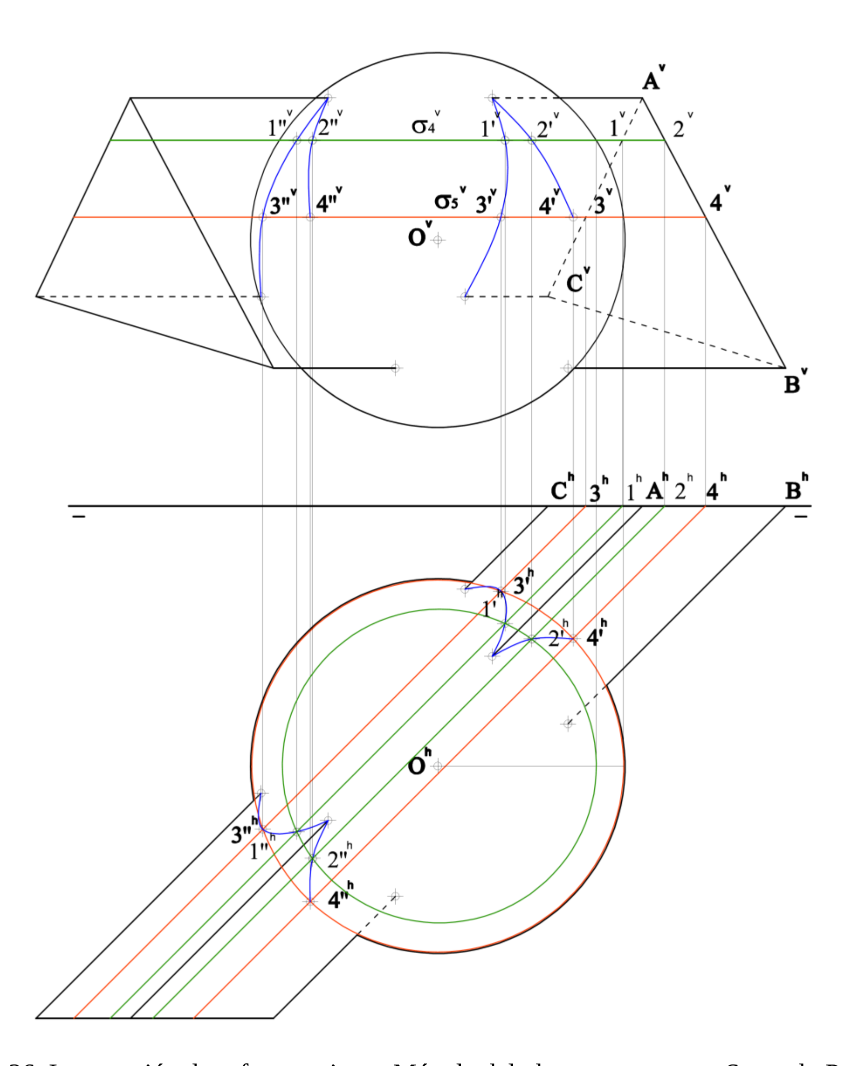


Fig. 36. Intersección de esfera y prisma. Método del plano proyectante. Segundo Paso.

Estos planos generan secciones sencillas en el prisma y paralelos en la esfera, proporcionando puntos en los cortes entre ambas secciones, los cuales, como ya se ha indicado, se sitúan sobre las poligonales de intersección. Destaca el plano σ_6, ya que corresponde al plano del ecuador de la esfera, de tal manera que los puntos que esta superficie genera, son aquellos en los cuales la visibilidad de las poligonales de intersección cambia en proyección horizontal (Fig. 37).

Una vez obtenidos los puntos buscados, se procedió al trazado preliminar de las proyecciones diédricas de ambas poligonales de intersección, para luego realizar el estudio de su visibilidad y el posterior trazado definitivo.

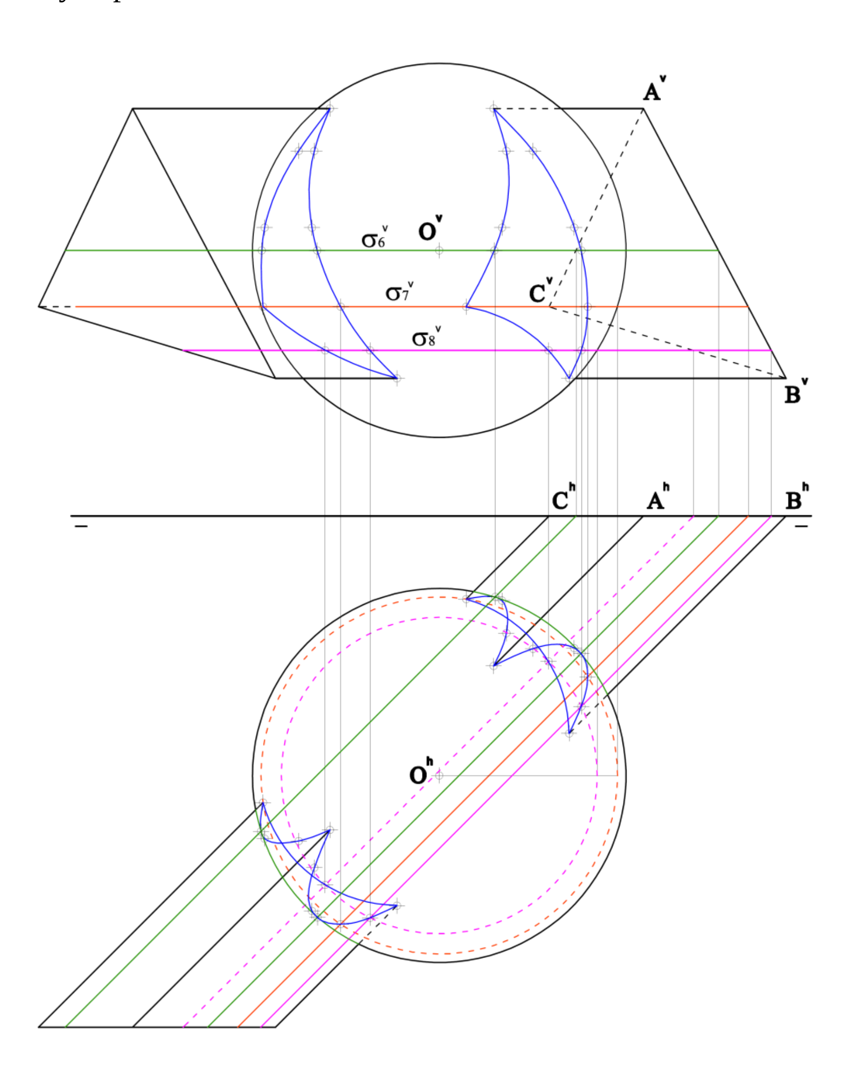


Fig. 37. Intersección de esfera y prisma. Método del plano proyectante. Segundo Paso (continuación).

La *poligonal de entrada* resulta completamente invisible en proyección vertical, ya que se encuentra en su totalidad ubicada en la parte posterior de la esfera, es decir, por detrás del meridiano frontal. En proyección horizontal, el arco contenido en la cara lateral limitada por los vértices B y C del prisma es invisible, puesto que se ubica por debajo del ecuador de la esfera; los otros dos arcos tienen una porción invisible y otra visible, limitadas por los puntos generados en la poligonal por el plano σ_6 (Fig. 38).

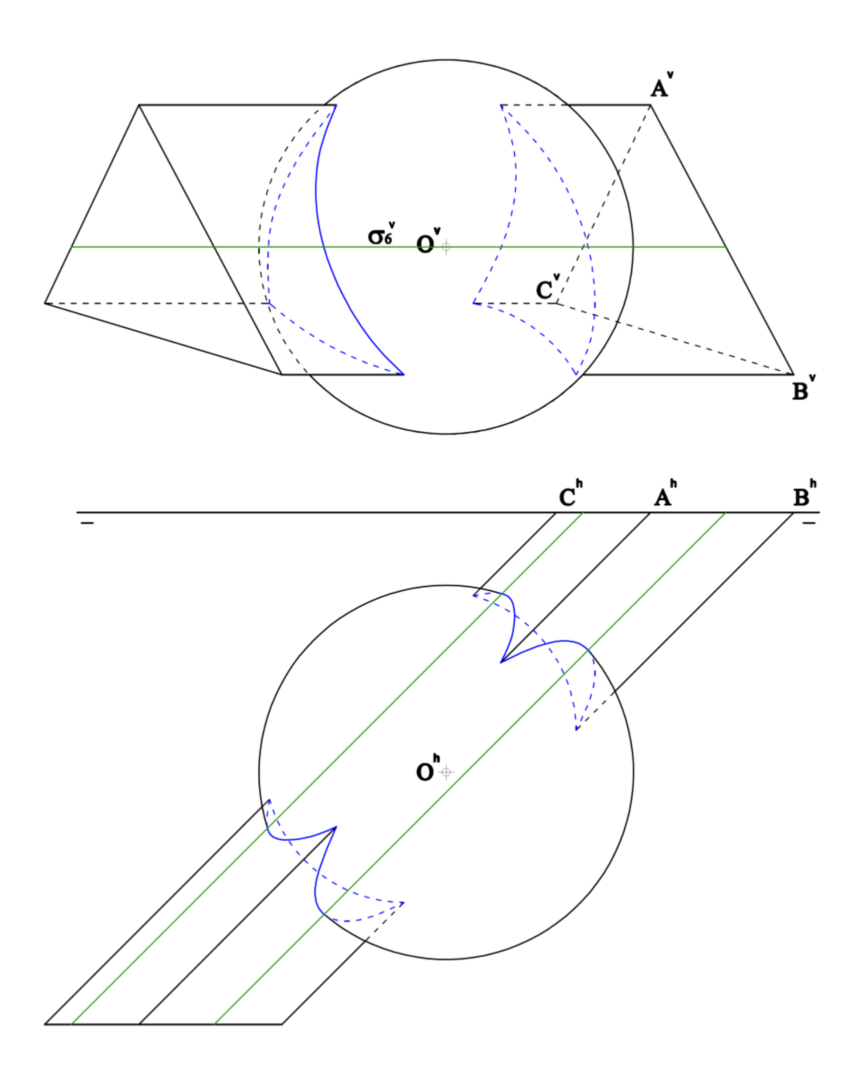


Fig. 38. Intersección de esfera y prisma. Método del plano proyectante. Visibilidad y resultado final.

Realizando un estudio similar puede concluirse que la poligonal de salida, no obstante encontrarse por delante del meridiano frontal, tiene dos arcos completamente invisibles en proyección vertical: los contenidos en las caras laterales correspondientes a los vértices AC y BC; esto se debe a que las caras laterales mencionadas resultan ser invisibles en el alzado. Por el contrario, el arco contenido en la cara lateral AB resulta ser visible en esa

proyección. En lo que respecta a la poligonal de salida en proyección horizontal, es evidente que el arco contenido en la cara lateral BC del prisma es completamente invisible; los otros dos arcos tienen una porción visible (por encima del ecuador) y otra visible (por debajo del ecuador) limitadas por el plano σ_6.

INTERSECCIÓN DE SÓLIDOS MEDIANTE EL MÉTODO DE PLANOS DE SECCIÓN SENCILLA

Cuando en la intersección entre dos sólidos interviene un cuerpo con superficie de simple curvatura (cono o cilindro), la aplicación del método de planos proyectantes puede ocasionar complicaciones desde el punto de vista del trazado, ya que las secciones producidas en este tipo de superficies eventualmente tendrían la forma de una cónica (circunferencia, elipse, parábola e hipérbola). Como alternativa, se plantea la posibilidad de generar secciones sencillas mediante planos paralelos al eje del sólido, en el caso de los cilindros, o que pasen por su vértice, en el caso de los conos (ver figuras 10 y 11), lo cual representa el fundamento del denominado Método de Planos de Sección Sencilla.

De acuerdo con Rondón y Téllez (1985), el método es

> Aplicable a aquellos sólidos que por sus características formales permiten determinar en ellos secciones sencillas, como es el caso de prismas pirámides, cilindros y conos. Consiste en trazar planos secantes que produzcan simultáneamente secciones sencillas en ambos sólidos, de modo tal que cada uno de los planos secantes origine un par de secciones sencillas coplanarias.
>
> La unión de los puntos de corte entre las generatrices o aristas que conforman dichas secciones, define la línea de intersección (p. 202).

El procedimiento a seguir para determinar la(s) poligonal(es) de intersección entre dos sólidos siguiendo este método depende, en general, de tres factores fundamentales:

- Ubicación del vértice principal de cada sólido: Este vértice puede ubicarse en un ligar finito del espacio (pirámides y conos) o en el infinito (prismas y cilindros). En vista de que los planos a construirse deben producir secciones sencillas

simultáneamente en ambos sólidos, resulta fundamental la construcción de un elemento geométrico que permita la definición de cada uno de esos planos:

- Si se trata de dos sólidos con vértice principal en un lugar finito del espacio (pirámide-pirámide, cono-cono o cono-pirámide) este elemento es la recta que pasa por ambos vértices principales, denominada *recta sencilla*: todos los planos que producen secciones sencillas en ambos sólidos pasan por esta recta (Fig. 39-a).
- Para el caso de un sólido con vértice principal en un lugar finito y otro con vértice principal en el infinito (pirámide-prisma, cono-cilindro, pirámide-cilindro o cono-prisma), la *recta sencilla* es la recta que pasa por el vértice de la pirámide o cono y es paralela al eje del prisma o cilindro (Fig. 39-b).
- Por último, cuando se trata de dos sólidos con vértice principal en el infinito (prisma-prisma, cilindro-cilindro o prisma-cilindro), es preciso construir un *plano sencillo*, paralelo al cual resultan todos los planos que producen secciones sencillas simultáneamente en ambos sólidos. Este plano se define construyendo dos rectas paralelas a los ejes de ambos sólidos, que pasen por un punto cualquiera del espacio (Fig. 39-c).

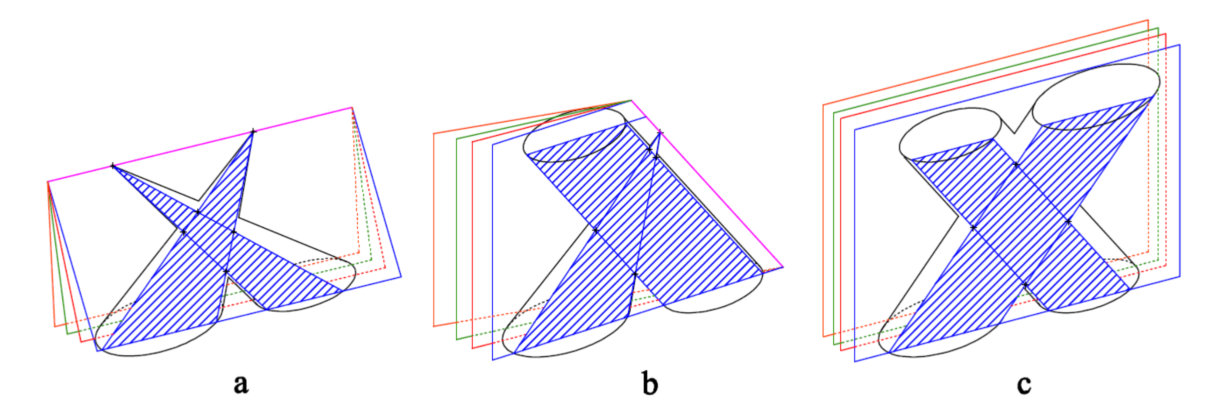


Fig. 39. Planos de sección sencilla en función de la ubicación del vértice principal de los sólidos.

- Ubicación de las bases de los sólidos: dado que los sólidos involucrados son del tipo radial (una superficie lateral y una base), es posible que sus bases se encuentren sobre un mismo plano (coplanarias) o sobre planos distintos (no coplanarias). Esta

variable, aunada a la siguiente, es determinante en los pasos iniciales del procedimiento:

- Tipo de Intersección: como ya se ha indicado, el tipo de intersección entre dos sólidos puede ser completa o penetración, mordedura, tangencial simple y tangencial doble.

A continuación se presentan una serie de ejemplos que pretenden ilustrar el procedimiento a seguir para determinar la poligonal de intersección en cada caso, partiendo de las consideraciones anteriormente expuestas.

Intersección de sólidos con bases coplanarias

Intersección entre dos conos de bases coplanarias

1. Considérese el problema de determinar la intersección entre dos conos cuyas bases se encuentran sobre un mismo plano. El primer paso, tal y como se ha señalado, es la definición de la *recta* sencilla“s”, la cual está determinada por los vértices principales de ambos sólidos.A continuación se determina el punto de intersección S entre la *recta sencilla* y el plano que contiene a ambas bases (Fig. 40), también conocido como *punto sencillo*.

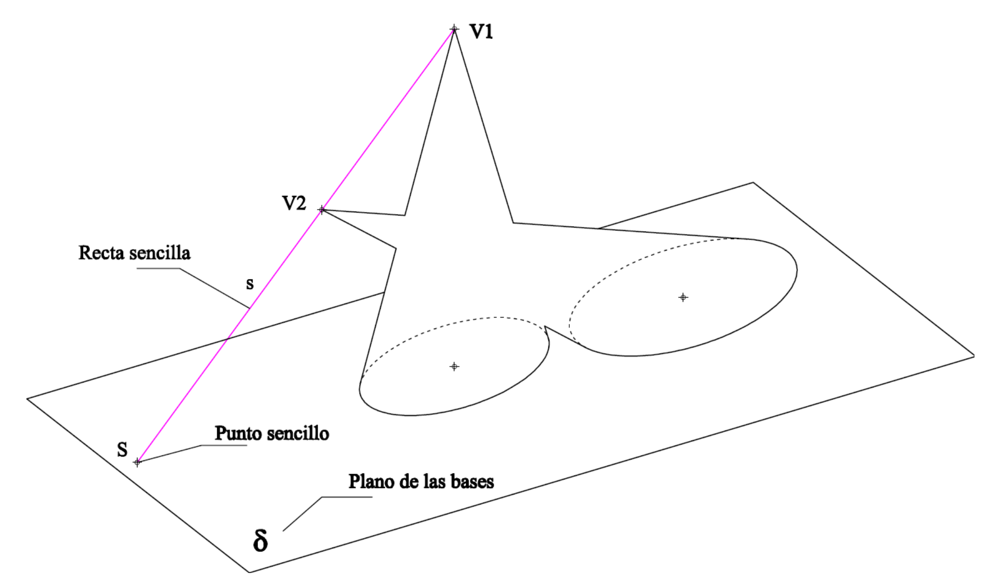


Fig. 40. Intersección entre dos conos con bases coplanarias. Primer paso

2. Las intersecciones entre los diferentes planos de sección sencilla ($\sigma_1 \ldots\ldots \sigma_n$) a ser construidos y el plano que contiene a las bases de los conos (δ), pasan por el punto

S. Así que por este punto se deben dibujar dichas rectas, comenzando por aquellas tangentes a las bases de los sólidos, ya que estas representan las intersecciones entre los *planos límite de sección* sencilla y el plano base, las cuales van a determinar las posibles partes impropias (ajenas a la intersección), y por consiguiente, el tipo de intersección resultante[1]. En la Figura 41 se observa cómo las rectas que, pasando por S, son tangentes al cono de vértice V1, no determinan ningún punto de corte en la base del otro sólido, lo cual implica que los planos correspondientes no generan sección alguna en éste último sólido.Por otra parte, las rectas que, trazadas por S, son tangentes al cono de vértice V2 en A y F y representan a los *planos límites* (σ_1 y σ_6), provocando sendos cortes en la base del otro sólido (puntos 1,6, 7 y 12).Lo anterior significa que en el cono de vértice V1 existen dos (2) partes impropias, señaladas mediante achurados en las bases de dicho sólido. En vista de que los planos límites (σ_1 y σ_6) son tangentes al cono de vértice V2 y producen secciones sencillas en el cono de vértice V1, es posible inferir que dos porciones de éste último (una a cada lado de los planos límite) no participan en la intersección. De lo anterior se concluye que la intersección resultante será del tipo *penetración*, en la cual el cono de vértice V2 penetra completamente al sólido con vértice en V1.

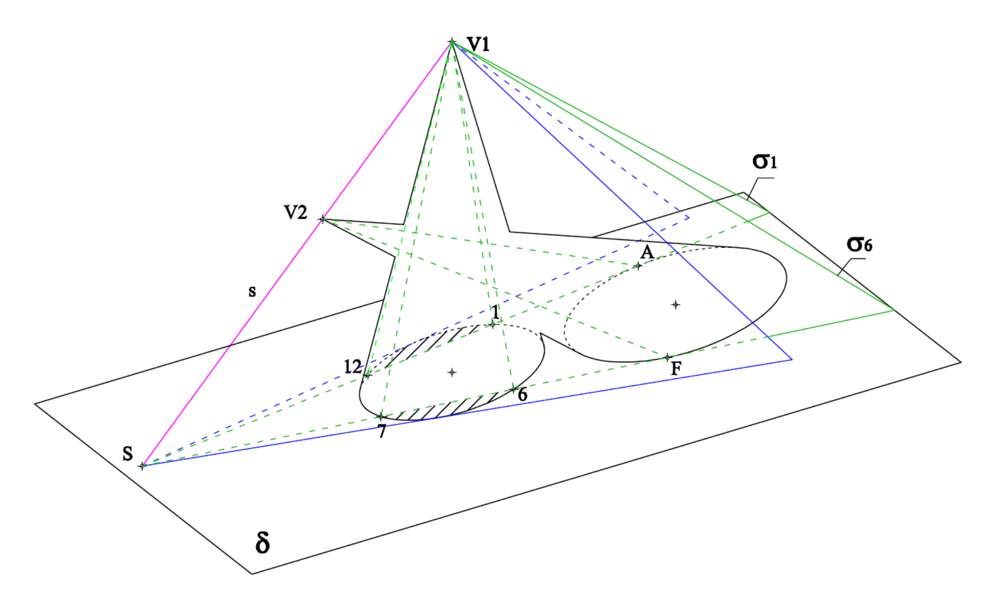


Fig. 41. Intersección entre dos conos con bases coplanarias. Segundo paso

[1] En caso de que la recta sencilla "s" sea paralela al plano de las bases (δ), el punto de intersección S será impropio, luego, las rectas de intersección mencionadas (σ_1, σ_2,…σ_n) deberán ser trazas paralelas a la recta sencilla "s".

3. Una vez determinados los planos límite y los puntos correspondientes en cada una de las bases, se procede a la construcción de un número suficiente de planos de sección sencilla (σ_2, σ_3, σ_4y σ_5, en la Fig. 42), situados entre ambos planos límite y en número suficiente para lograr una cantidad razonable de puntos sobre la poligonal de intersección. Conviene que entre esos planos se encuentren los que contienen a las generatrices de contorno aparente de cada cono, a fin de obtener puntos de cambio de visibilidad en la poligonal mencionada. Para ello, se trazan por S rectas que pasen por los pies de dichas generatrices, las cuales generan puntos de corte sobre ambas bases (Fig. 42).

De considerarse necesario, se generan planos adicionales de sección sencilla ubicados de forma intercalada entre los ya construidos, a objeto de obtener una mayor cantidad de puntos en la poligonal de intersección.

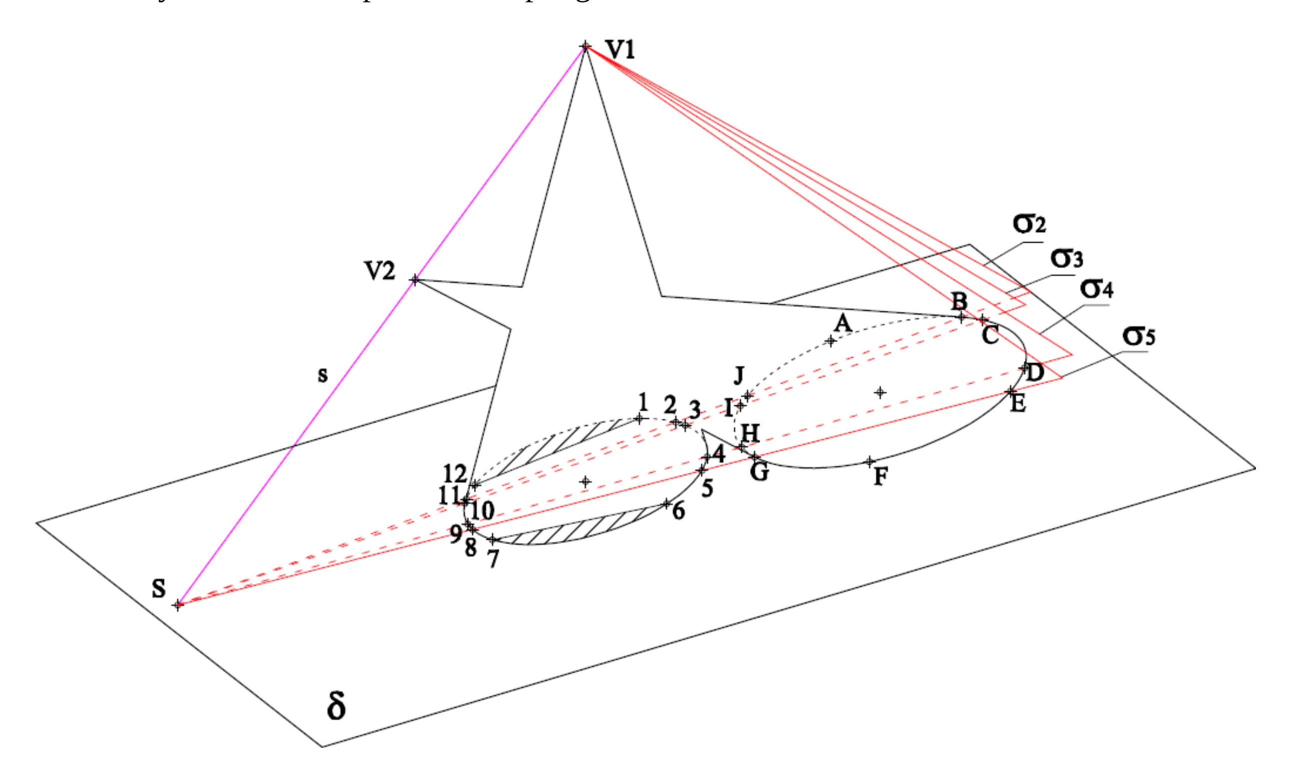


Fig. 42. Intersección entre dos conos con bases coplanarias. Tercer paso

4. Los puntos ubicados sobre una misma recta de intersección corresponden a los pies de generatrices ubicadas en secciones sencillas simultáneas (A – J y 1 – 12). Es preciso establecer la secuencia de unión entre los puntos resultantes del corte entre tales generatrices (puntos sobre la poligonal de intersección), ya que esta unión no

debe realizarse de forma arbitraria. Para ello, puede suponerse que se parte de uno de los dos planos límite (Fig. 43), por ejemplo σ_1, específicamente de los puntos A y 1. Se van emparejando los puntos marcados en cada una de las dos bases, recorriéndolas en un mismo sentido (horario en el ejemplo) y cuidando volver en sentido contrario al encontrar una parte impropia.

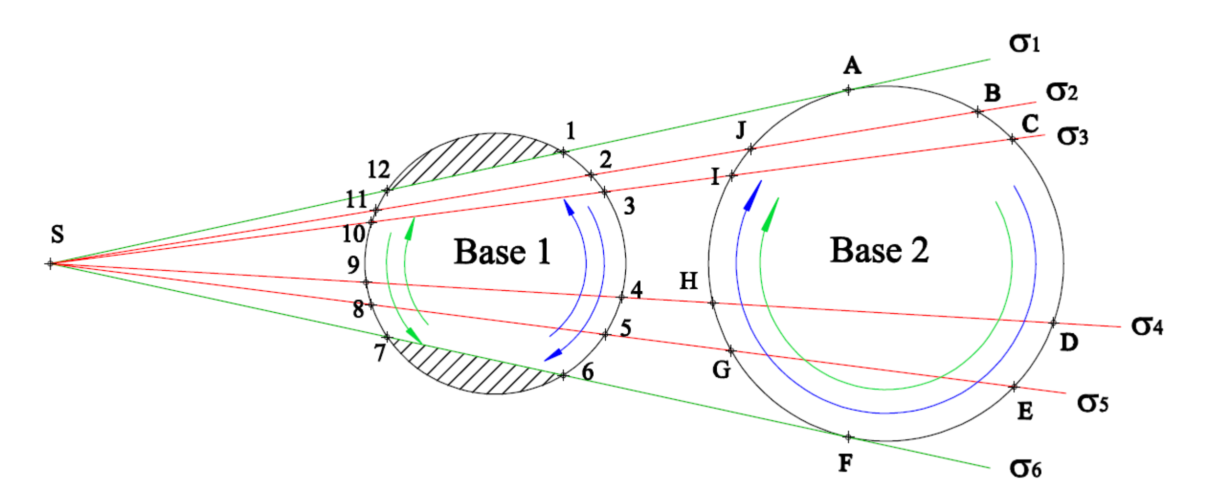


Fig. 43. Intersección entre dos conos con bases coplanarias. Emparejamiento de los puntos de las directrices para el caso de *penetración*

En el ejemplo mostrado, al tratarse de una de una penetración, la intersección se compone de dos poligonales bien diferenciadas, por tanto, las parejas de puntos estarán en dos grupos: el primero de ellosse obtiene al recorrer en ambos sentidos la parte de la Base 1 comprendida entre los puntos 1 y 6 (entre ambas partes impropias), al tiempo que se recorre completamente la Base 2. El resultado es la secuencia

A1-B2-C3-D4-E5-F6-G5-H4-I3-J2-A1

El otro grupo de parejas de puntos resulta al recorrer la Base 1 desde 12 hasta 7 y luego desde 7 hasta 12, en tanto que se recorre por completo la Base 2. Así se obtiene la siguiente secuencia

A12-B11-C10-D9-E8-F7-G8-H9-I10-J11-A12

Como puede verse (Fig. 43), ambas secuencias inician y terminan en una misma pareja, dado que ambas poligonales son cerradas. Además, ninguna de las parejas de

una secuencia se repite en la otra, pues ambas poligonales de intersección son independientes en una penetración.

5. Los puntos de la poligonal de intersección se obtienen en los cortes de las generatrices de ambos conos correspondientes a las parejas determinadas en el paso anterior. Así, por ejemplo, el punto D4 de la *poligonal de entrada* se obtiene en el corte de la generatriz V2-D con la generatriz V1-4. La curva resultante de la unión secuencial de todos los puntos de la poligonal de entrada (Fig. 43), debe ser trazada usando las plantillas, estableciendo al mismo tiempo las partes visibles y las partes ocultas de dicha curva. Un segmento de la poligonal, comprendido entre dos puntos sucesivos de la misma, será visible en una determinada proyección si y solo si ambos puntos son visibles en esa proyección; y para que un punto de la poligonal sea visible, las dos generatrices que originan ese punto deben ser también visibles.

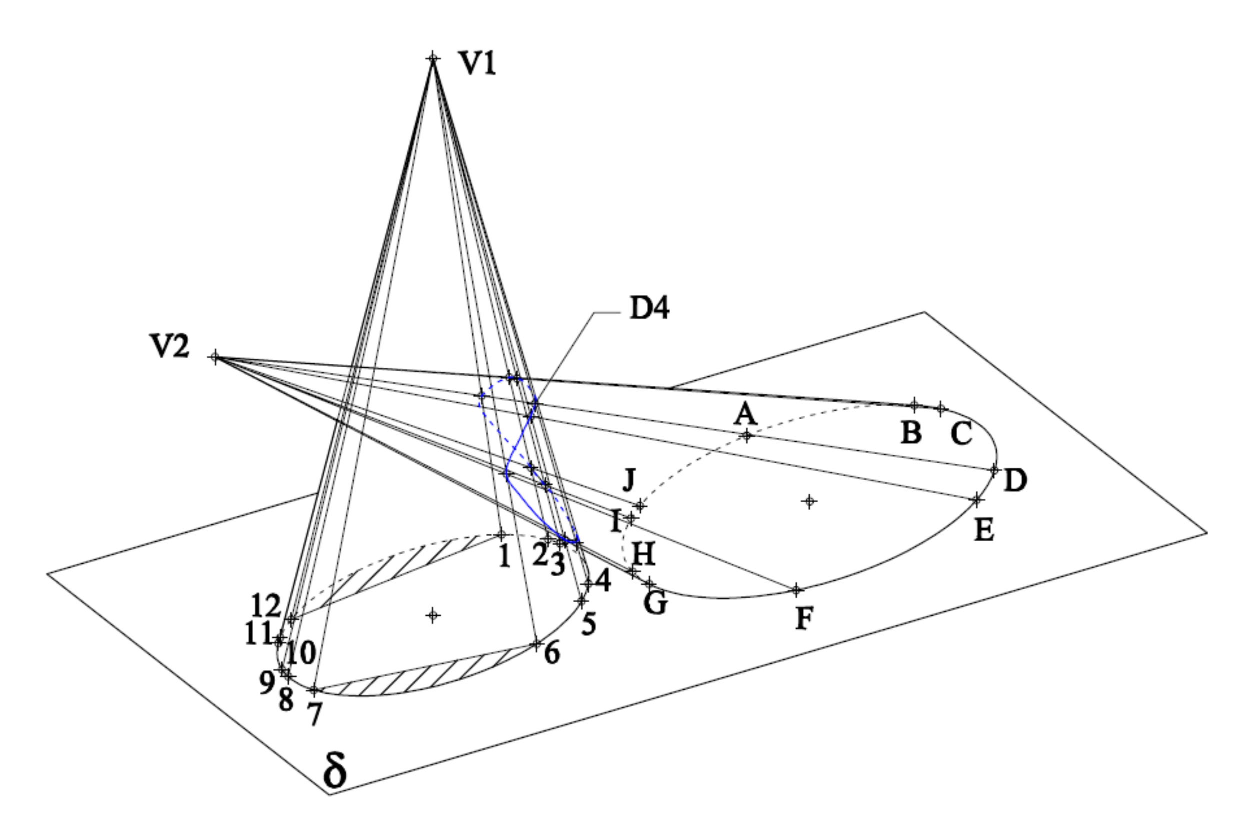


Fig. 44. Intersección entre dos conos con bases coplanarias. Determinación de los puntos de la poligonal de entrada y trazado de la curva correspondiente.

Luego, se determinan los puntos de la poligonal de salida, tomando en cuenta las mismas consideraciones hechas en para determinar los puntos de la poligonal de

entrada, tanto para hallar los puntos en sí,como en lo atinente a la visibilidad de la curva. Las generatrices de contorno aparente de cada uno de los sólidos serán visibles siempre y cuando penetren al otro en un punto visible en la proyección. El resultado final puede verse en la Fig. 45.

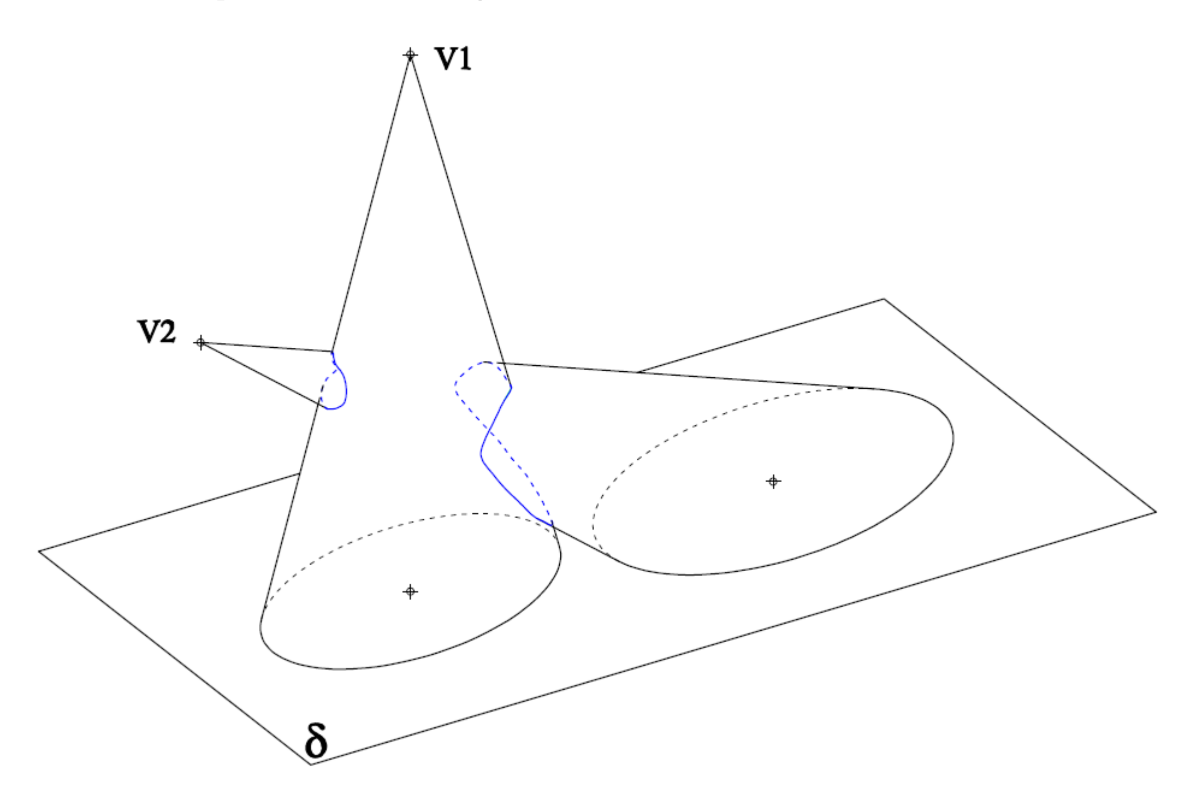


Fig. 45. Intersección entre dos conos con bases coplanarias. Resultado final.

Intersección entre una pirámide y un prisma de bases coplanarias

1. Considéreseahora el problema de determinar la intersección entre una pirámide y un prisma, ambos con sus bases contenidas en el plano δ.El primer pasoes la definición de la *recta* sencilla“s”, la cual está determinada por el vértice V de la pirámide y la dirección del eje del prisma.Por lo tanto, dicha recta “s” se construye pasando por el punto V y paralela a las aristas laterales del prisma. Luego, se determina el punto de intersección S entre la *recta sencilla* y el plano que contiene a ambas bases (Fig. 46), el cual viene a ser el*punto sencillo* S.

El desarrollo de la solución se representará en perspectiva axonométrica. Para la representación en sistema diédrico de este tipo de ejercicios, el lector debe tomar en cuenta las leyes de dicho sistema.

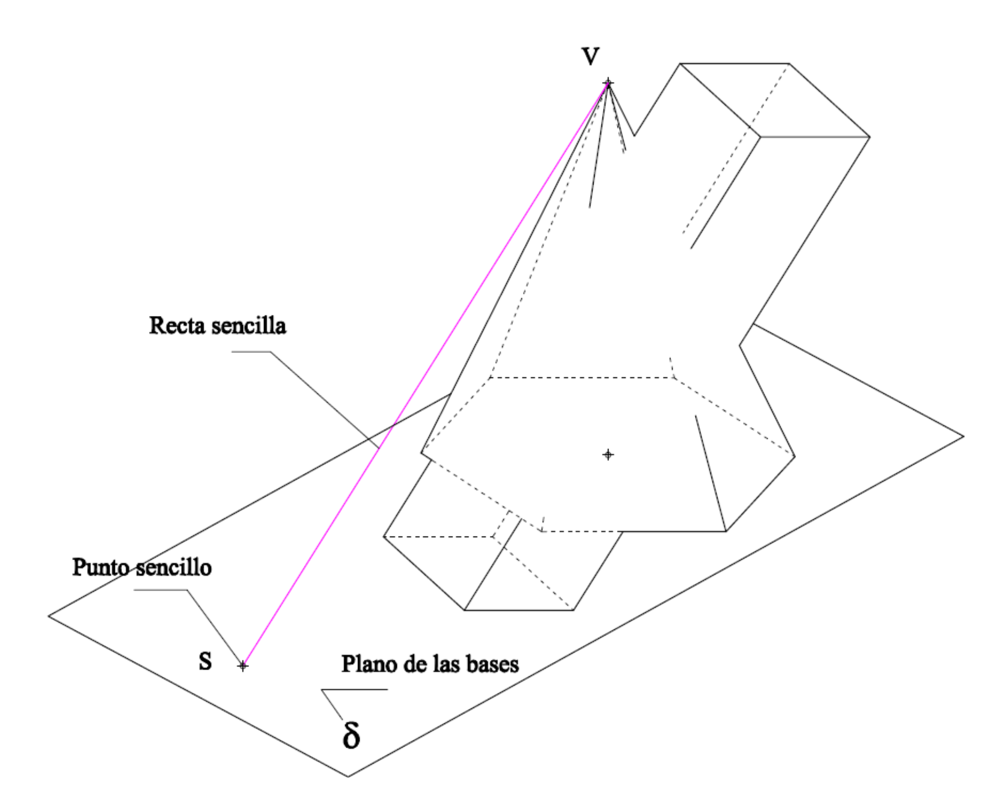


Fig. 46. Intersección entre una pirámide y un prisma con bases coplanarias. Primer paso.

2. Al igual que en el ejemplo anterior, las intersecciones entre los diferentes planos de sección sencilla (σ_1…..σ_n) a ser construidos y el plano que contiene a las bases de los sólidos (δ),pasan por el punto S. Así que por este punto se deben dibujar dichas rectas; cada una de ellas debe pasar por un vértice básico de cada uno de los sólidos, por lo que, en el ejemplo planteado, se trazan nueve (9) intersecciones en total. En la Figura 47 se observa cómo cuatro (4) de las rectas que, pasando por S y por un vértice básico de uno de los sólidos, no determinan ningún punto de corte en la base del otro, lo cual implica que los planos correspondientes no generan sección alguna en éste último sólido. Dos de estas intersecciones corresponden a los vértices más exteriores del prisma por la derecha, en tanto que las otras dos corresponden a los vértices más exteriores de la pirámide por la izquierda. En definitiva, las intersecciones que pasan por los vértices denotados como 1 (prisma) y E (pirámide), es decir, σ_1 y σ_6, respectivamente, representan los límites de la intersección entre ambos sólidos.

Lo anterior significa que existe una parte impropia en cada sólido, señaladas mediante achurados en las bases correspondientes. Esto implica que la intersección

resultante será del tipo *mordedura*, existiendo, por lo tanto, una única poligonal de intersección.

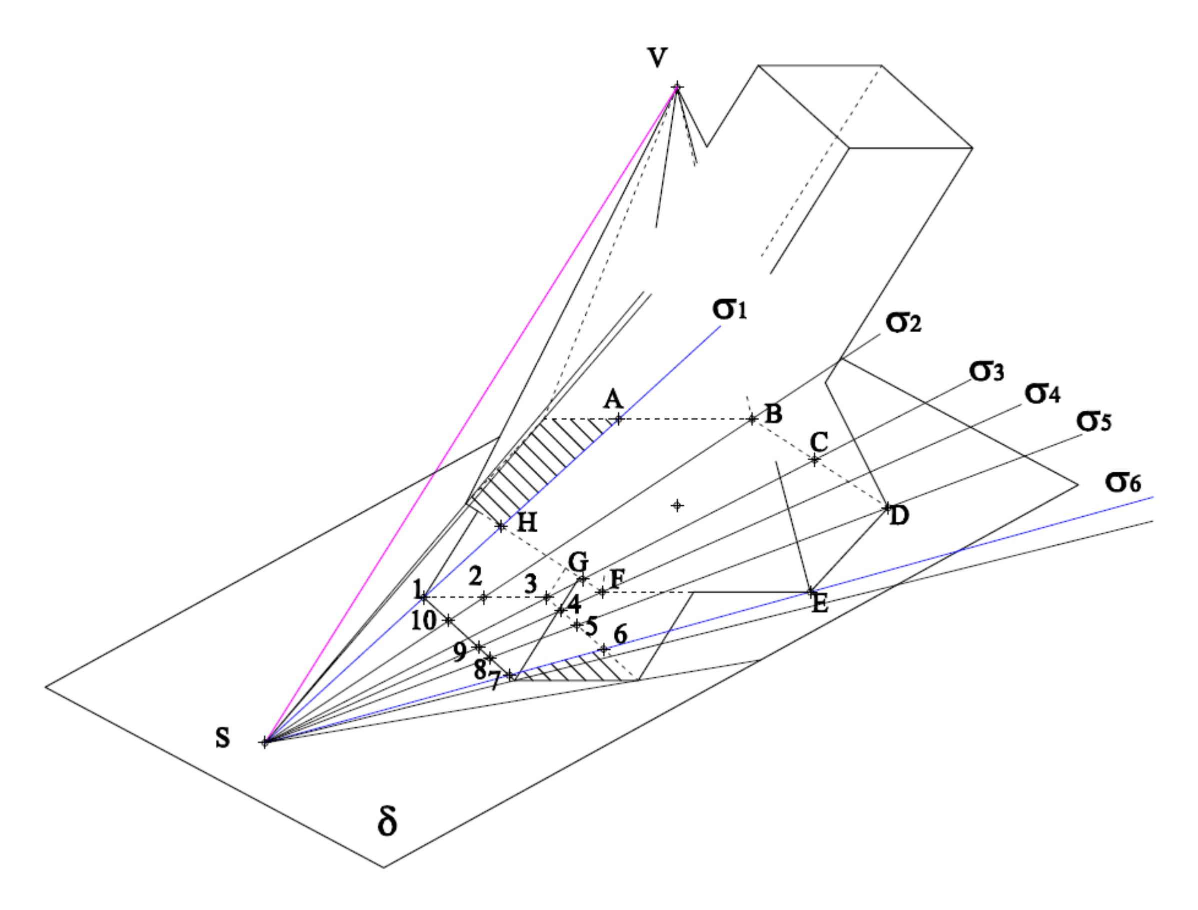


Fig. 47. Intersección entre una pirámide y un prisma con bases coplanarias. Segundo paso.

Es importante señalar que, en el caso de que ambos sólidos sean poliedros, las intersecciones de los planos de sección sencilla con el plano de base deben pasar por un vértice de base de uno de los sólidos y producir dos cortes en la base del otro. Así, por ejemplo, puede verse en la Fig. 47 cómo la intersección σ_2 – la cual pasa por el vértice de base B dela pirámide – genera los puntos de corte 2 y 10 en la base del prisma, pero sin generar un punto adicional (aparte de B) en la pirámide. La razón de esto obedece a lo siguiente: cada arista de un sólido que participa en la intersección (como la que corresponde a B) "penetra" al otro sólido en un punto (B2) y "sale" del mismo en otro (B10)[2]. Una vez determinados todos los puntos "interesantes", se procede a nombrarlos empleando, por ejemplo, números para uno

[2]Ver tema relacionado con la intersección recta-sólido en la sección INTERSECCIÓN ENTRE UNA RECTA Y UN SÓLIDO.

de los sólidos y letras para el otro. Resulta conveniente iniciar en un mismo plano límite y seguir el mismo sentido para ambos cuerpos.

3. Una vez determinadas las rectas de intersección entre los planosde sección sencilla y el plano de base, así como los puntos interesantes en las bases de ambos sólidos, el siguiente paso es la definición de la secuencia de emparejamiento de estos últimos. Para ello, se inicia el recorrido en uno de los planos límite (preferiblemente en aquél plano límite en el cual se inició la asignación de nombres), teniendo en cuenta que es imprescindible invertir el sentido del recorrido al llegar a una parte impropia (Fig. 48).

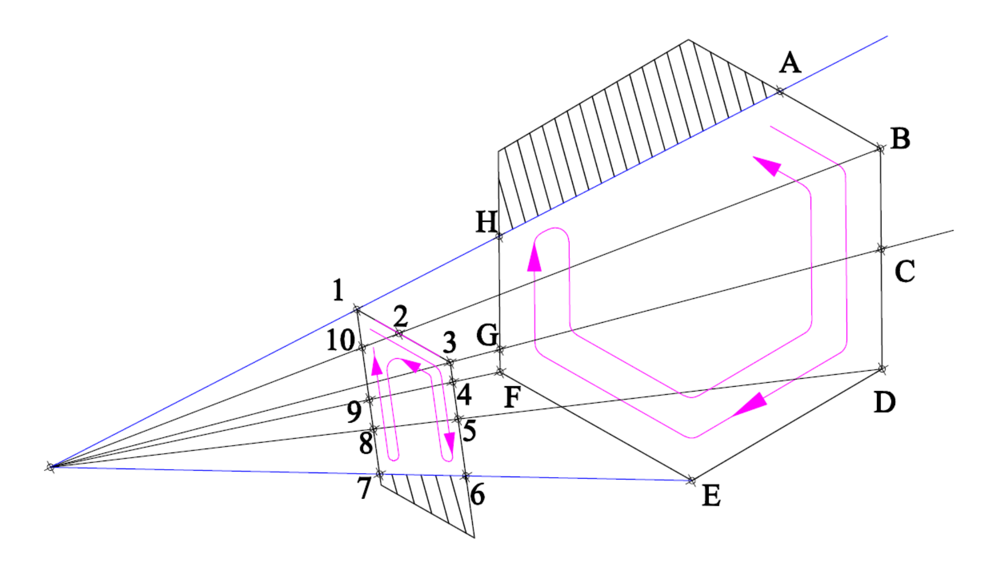


Fig. 48. Intersección entre una pirámide y un prisma con bases coplanarias. Tercer paso.

Además, para el caso del ejemplo presentado, como se trata de una *mordedura* o *intersección incompleta*, la poligonal es una una sola, por lo que ninguna pareja se debe repetir. Por otra parte, como siempre esta poligonal es cerrada – ya que se trata de volúmenes limitados – la pareja inicial debe ser también la última del recorrido. El resultado es la secuencia:

A1-B2-C3-D5-E6-F4-G3-H1-F9-E7-D8-B10-A1

4. Los puntos de la poligonal de intersección en el espaciose determinan construyendo líneas convergentes en el vértice principal de la pirámide que pasen por los puntos identificados en su base como A, B,…H, las cuales se cortarán con líneas paralelas

al eje del prisma que pasen por los puntos 1, 2,…10, siguiendo rigurosamente la secuencia encontrada en el paso anterior.

La visibilidad de un segmento de la poligonal de intersección se determina de la siguiente forma:

- Si las caras laterales de los sólidos que generan el segmento son visibles en una proyección, entonces el segmento será ***visible*** en esa proyección (como el segmento H1-F9 en la Fig. 49).
- Si al menos una de las caras de los sólidos que generan el segmento es invisible en una proyección, entonces el segmento será ***invisible*** en esa proyección (como el segmento D5-E6 en la Fig. 49).

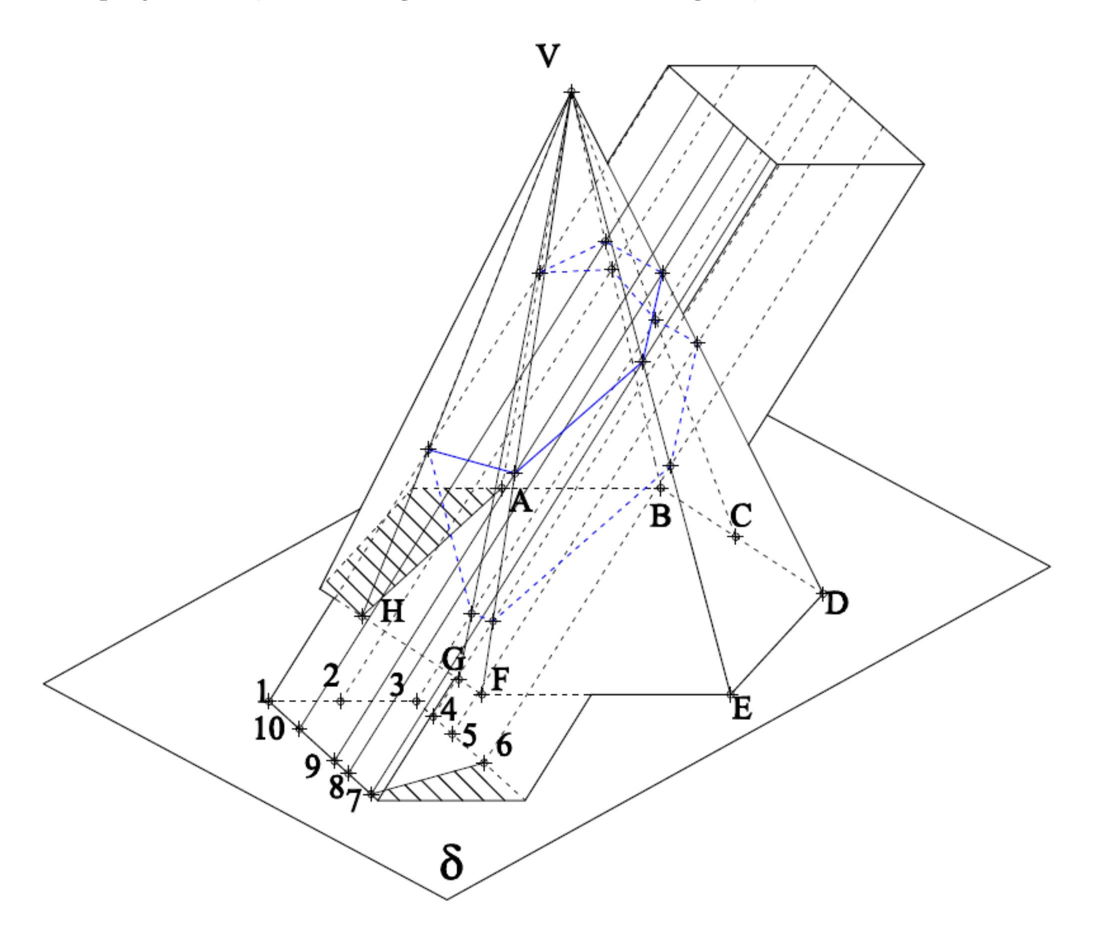


Fig. 49. Intersección entre una pirámide y un prisma con bases coplanarias. Cuarto paso.

5. Para finalizar, es preciso establecer la visibilidad de las aristas de cada uno de los sólidos. Para ello, es conveniente seguir las siguiente reglas:

- Si una arista penetra en el otro sólido en un punto visible de la poligonal (como el punto D8 en la Fig. 50), dicha arista será visible.
- Si una arista penetra en el otro sólido en un punto invisible de la poligonal (como el punto D5 en la Fig. 50), dicha arista será invisible.
- Para que un punto de la poligonal sea visible, basta con que al menos uno de los segmentos de dicha poligonal que convergen en ese punto sea visible
- Si una arista pertenece a una parte impropia, su visibilidad dependerá de la posición relativa entre los sólidos, por lo que se requiere visualizar correctamente el conjunto.

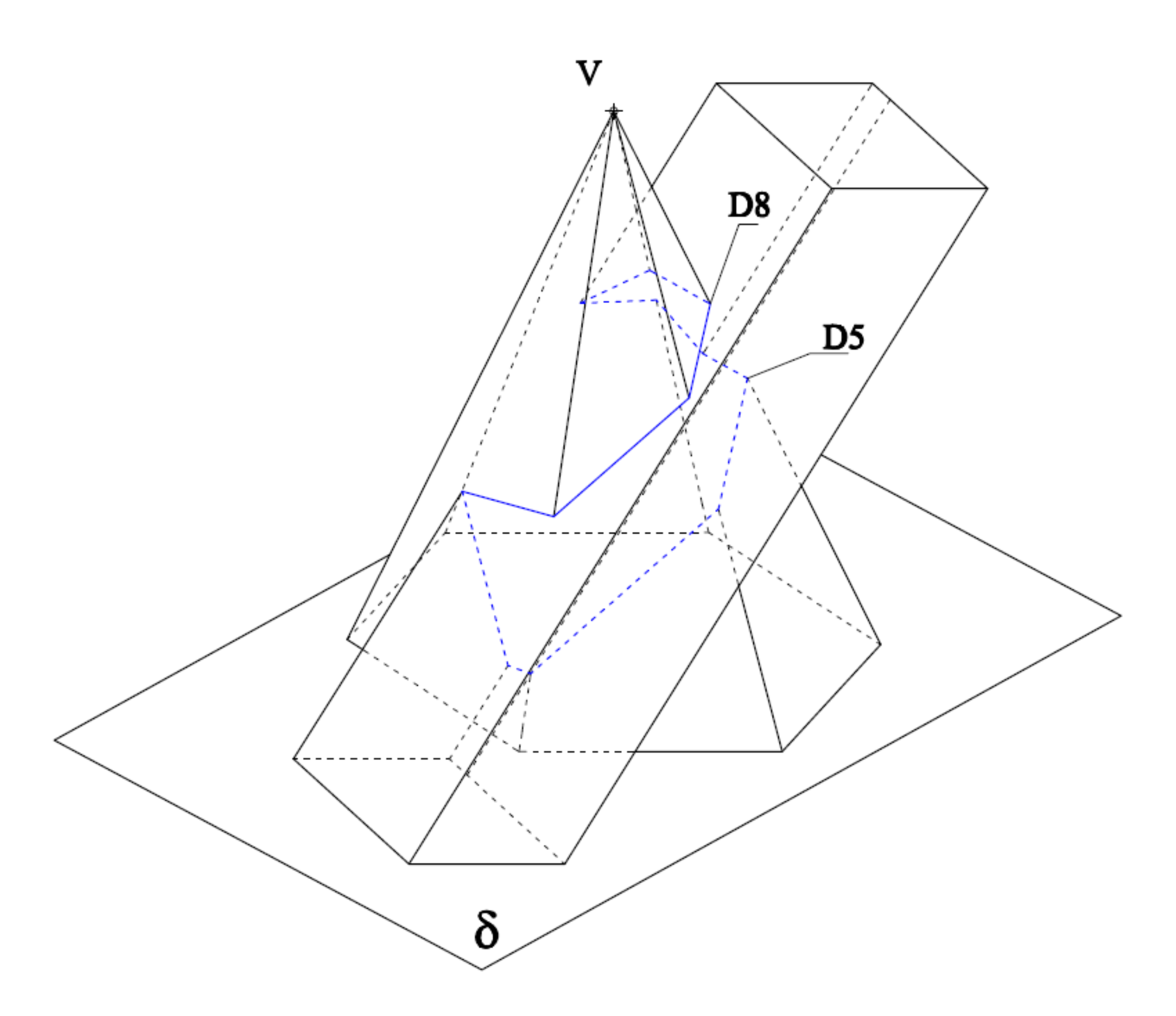


Fig.50. Intersección entre una pirámide y un prisma con bases coplanarias. Quinto paso y resultado final.

Intersección entre dos prismas de bases coplanarias

1. Cuando se trata de determinar la intersección entre dos sólidos con vértice principal infinito, como es el caso de los prismas y los cilindros, resulta imposible construir la denominada *recta sencilla*. Es preciso entonces construir un plano de referencia σ (plano sencillo) que sea paralelo a los ejes de ambos sólidos. Para hacerlo, se toma un punto cualquiera Q del espacio, y se hacen pasar por este punto rectas paralelas a los ejes de ambos sólidos ("r" y "m" en la Fig. 51), las cuales definen el plano buscado. Luego, se debe hallar la intersección "i" entre este plano σ y el plano de base δ.

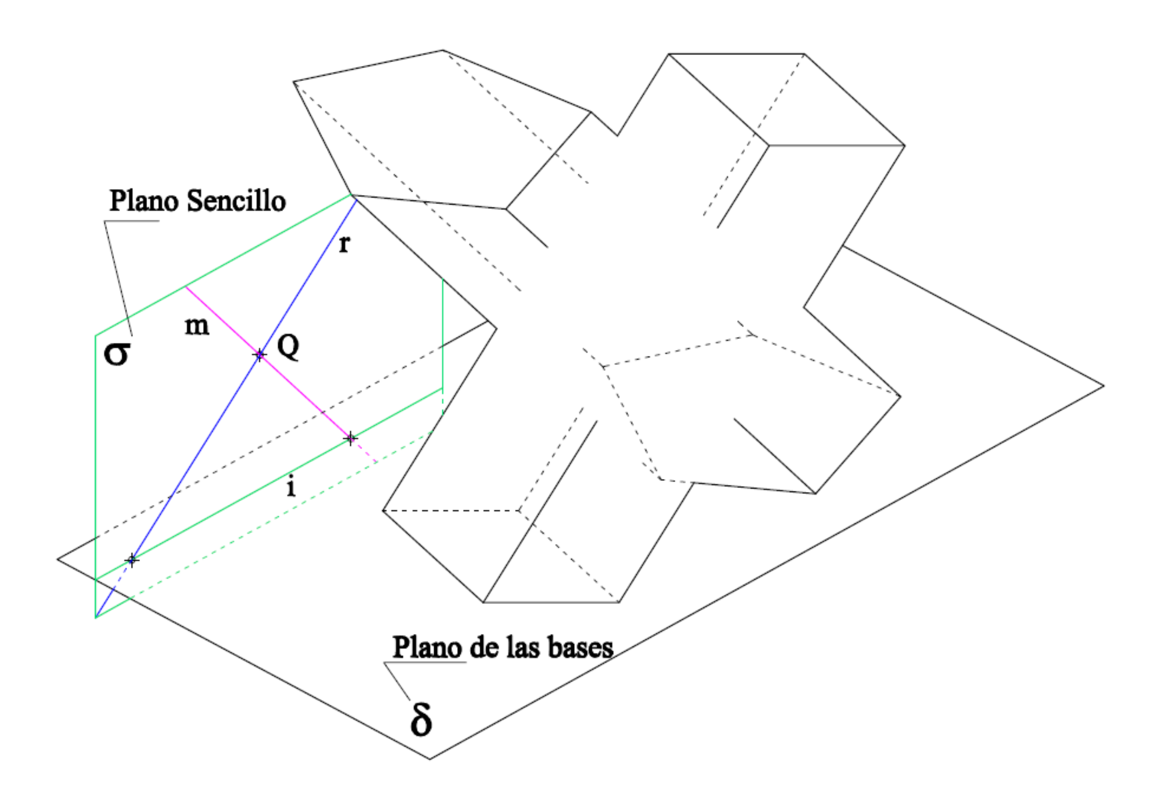


Fig.51. Intersección entre dos prismas con bases coplanarias. Primer paso.

2. A continuación, se trazan rectas paralelas a "i" por todos y cada uno de los vértices de ambas bases; estas rectasconstituyen las intersecciones entre los diferentes planos de sección sencilla (σ_1…..σ_n) con el plano que contiene a las bases de ambos sólidos. En la Fig. 52 puede verse cómo solamente una de estas intersecciones debe ser descartada, ya que si bien pasa por uno de los vértices de la base del prisma de

base pentagonal, no interseca a la base del prisma de base cuadrangular. En consecuencia, existe solamente una parte impropia (preciosamente en el prisma de base cuadrangular), lo cual significa que la intersección entre ambos sólidos es del tipo *tangencial simple*, siendo σ_1 y $\sigma_7$los planos límites de dicha intersección.

Luego, de la misma forma que se ha realizado en los ejemplos anteriores, se debe determinar los puntos de corte entre las paralelas a “i”, trazadas por cada vértice de base de uno de los sólidos, y la base del otro. Asimismo, se asignan nombres a cada uno de los puntos.

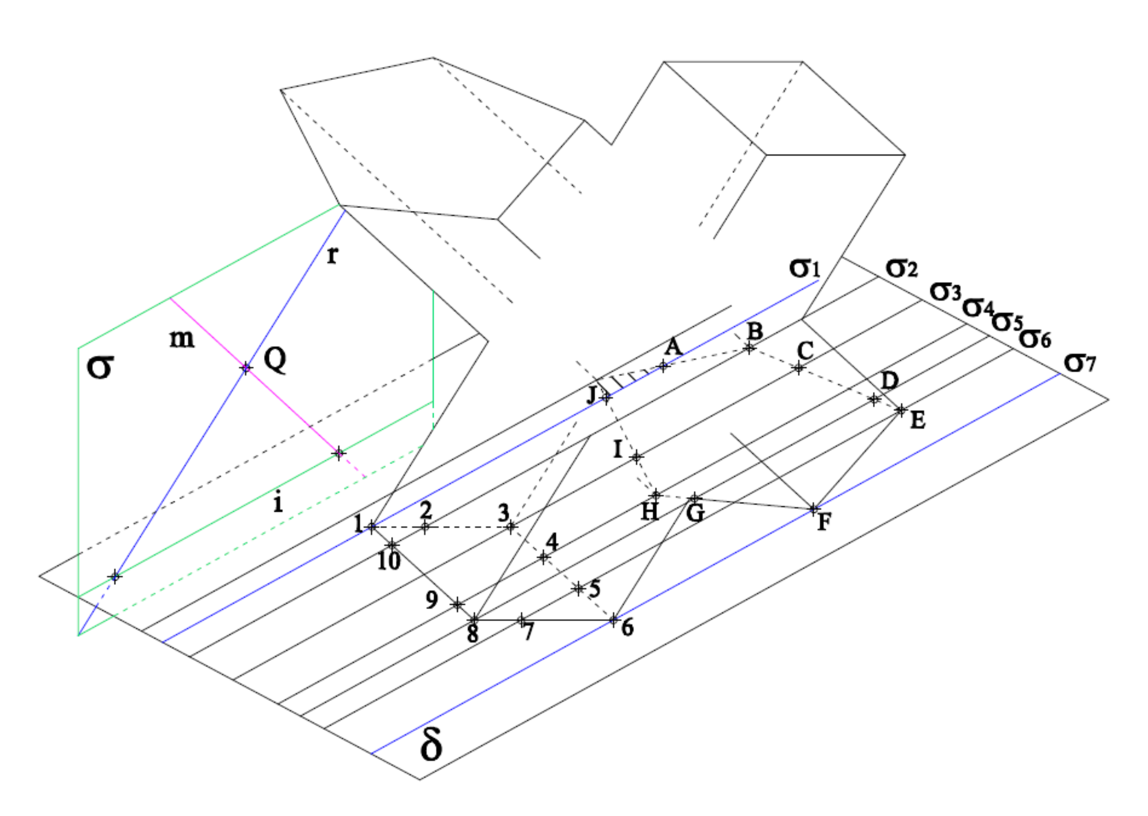


Fig.52. Intersección entre dos prismas con bases coplanarias. Segundo paso.

3. Una vez halladas las rectas de intersección entre los planosde sección sencilla y el plano de base, así como los puntos “interesantes” en las bases de ambos sólidos, la siguiente actividad es la definición de la secuencia de emparejamiento de dichos puntos. En este ejemplo, el recorrido realizado en la base del prisma pentagonal inicia en A, se invierte al llegar a J (ya que hay una parte impropia), y termina de nuevo en A. El otro recorrido (prisma de base cuadrangular) inicia en el punto 1, y como no hay partes impropias en ese sólido, consiste en dos (2) vueltas completas

ala base hasta finalizar en el mismo punto 1 (Fig. 53). En definitiva, la secuencia resultante es la siguiente:

A1-B2-C3-E5-F6-G8-H9-J1-I3-H4-F6-E7-D8-B10-A1

Es importante notar que en esta secuencia se repite una de las parejas: F6. Esto implica que la poligonal de intersección "pasa" dos veces por ese punto, siendo posible situar un plano tangente a ambos sólidos, el cual contiene a las aristas laterales correspondientes a 6 (prisma de base cuadrangular) y a F (prisma de base pentagonal).

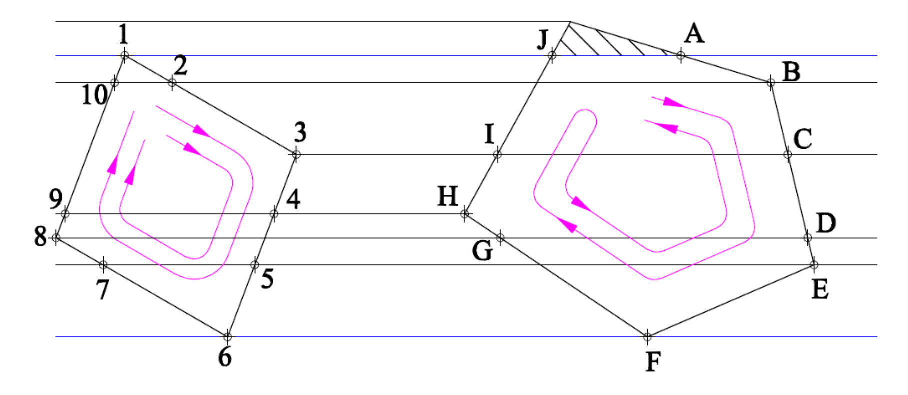


Fig.53. Intersección entre dos prismas con bases coplanarias. Tercer paso (determinación de la secuencia de emparejamiento)

4. Los puntos de la poligonal de intersección en el espacio se determinan construyendo líneas paralelas al eje de cada uno de los dos prismas que pasen por los puntos correspondientes de cada base, siguiendo al pié de la letra la secuencia determinada en el paso anterior.

   La visibilidad de un segmento de la poligonal de intersección se determina como ya se hizo en el ejemplo anterior:

   - Si ambas caras laterales de los sólidos que generan el segmento son visibles en una proyección, entonces el segmento será ***visible*** en dicha proyección (tal como el segmento E7-F6 en la Fig. 54).
   - Si al menos una de las caras de los sólidos que generan el segmento objeto de estudio es invisible en una proyección, entonces el segmento será ***invisible*** en esa proyección (como por ejemplo el segmento E5-F6 en la Fig. 54).

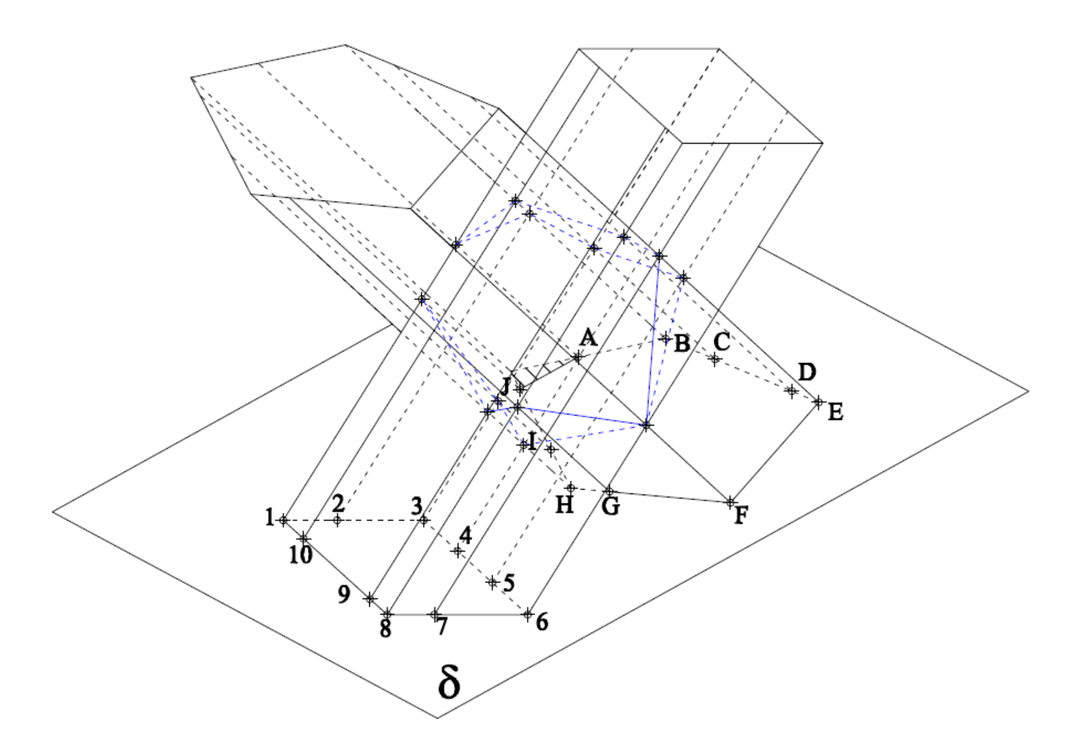


Fig.54. Intersección entre dos prismas con bases coplanarias. Cuarto paso.

5. Finalmente, se determina la visibilidad de las aristas de ambos prismas, siguiendo las reglas enunciadas en el ejemplo anterior (Fig. 55).

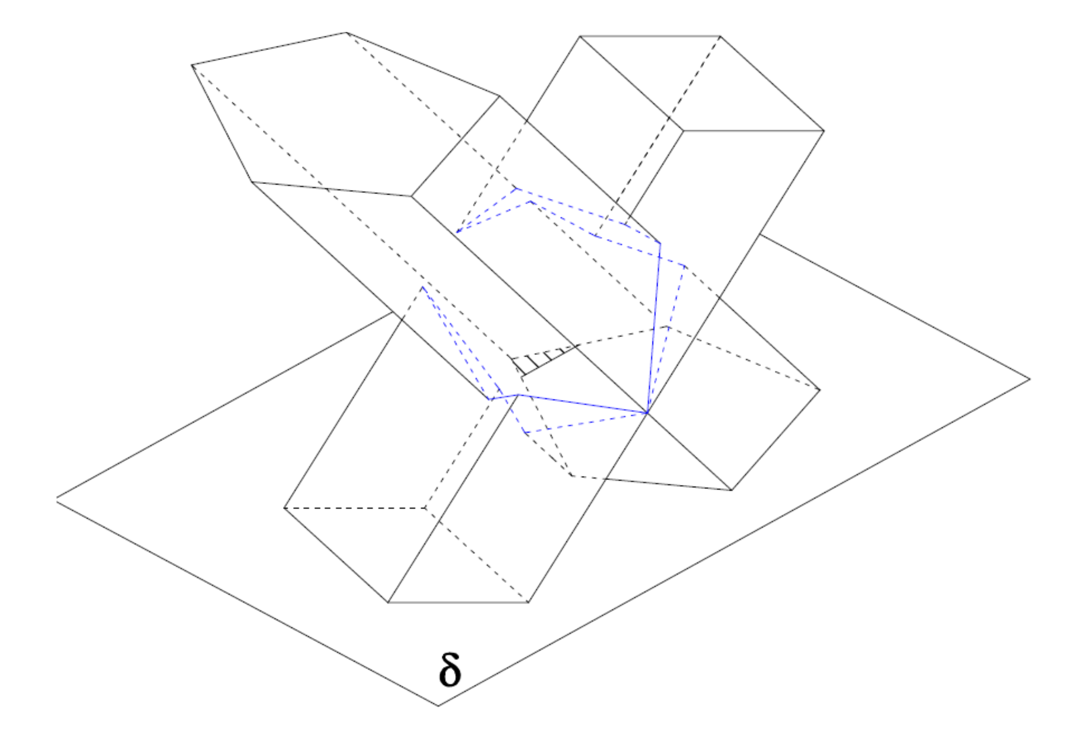


Fig.55. Intersección entre dos prismas con bases coplanarias. Quinto paso.

Intersección de sólidos con bases no coplanarias

Si los sólidos tienen bases contendidas en planos diferentes, δ y γ, por ejemplo, es imprescindible determinar la intersección entre esos planos ($i_{\delta\gamma}$), ya que sobre esta recta convergen la intersección entre un plano de sección sencilla y el plano base δ, con la intersección entre ese mismo plano de sección sencilla y el plano base γ. Lo anterior se cumple para las tres combinaciones de sólidos posibles, como se muestra en la Fig. 56.

- Para los casos de dos sólidos con vértice finito, y de un sólido con vértice finito y el otro con vértice infinito (impropio): Cada intersección entre un plano de sección sencilla y el plano δ pasa por el punto Sδ (intersección entre la recta sencilla "s" y el plano δ) y se corta con la corresponiente intersección entre ese mismo plano de sección sencilla y el plano γ (la cual pasa por el punto de intersección Sγ entre la recta sencilla "s" y el plano γ) en un punto de la recta $i_{\delta\gamma}$ (Fig. 56-a y 56-b).
- Si ambos sólidos tienen vértices infinitos (impropio): Cada intersección entre un plano de sección sencilla y el plano δ es paralela a $i_{\sigma\delta}$ (intersección entre el plano sencillo σconstruido por un punto Q y el plano δ) y se corta con la corresponiente intersección entre ese mismo plano de sección sencilla y el plano γ (la cual es paralela a $i_{\sigma\gamma}$) en un punto de la recta $i_{\delta\gamma}$ (Fig. 56-c).

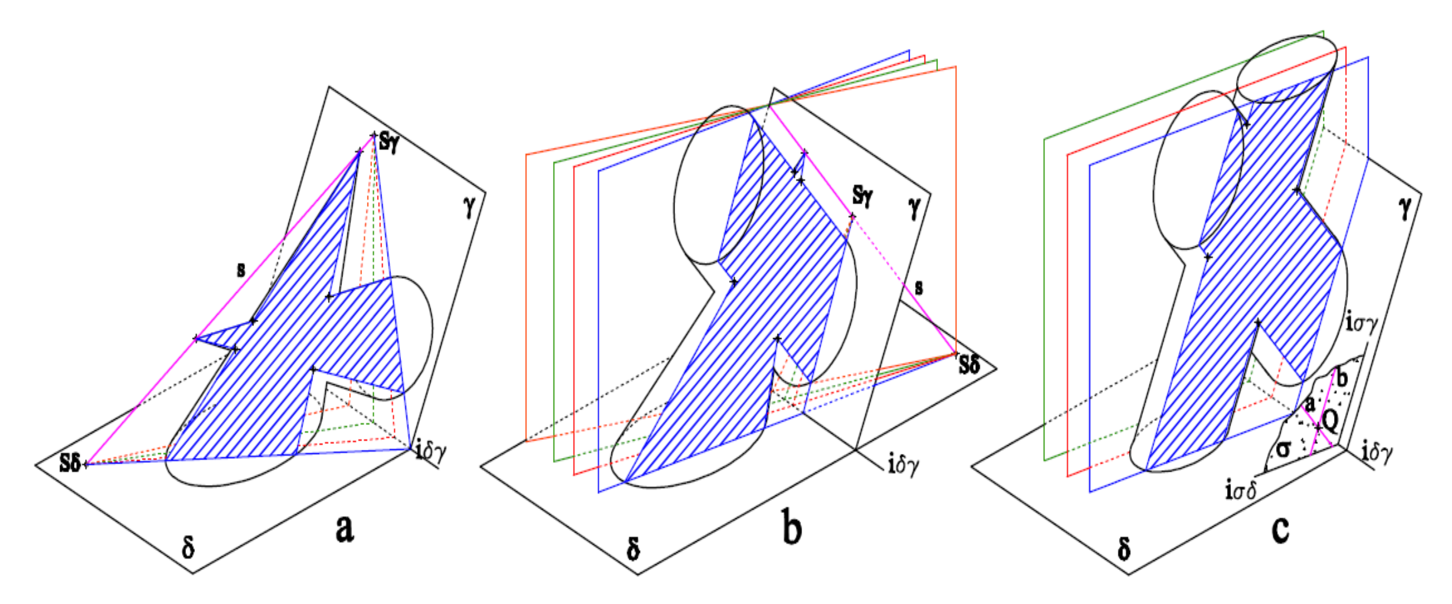


Fig.56. Elementos sencillos. Sólidos con bases no coplanarias

Intersección entre dos pirámides de bases no coplanarias

1. Como se ha indicado, el primer paso debe ser la determinación de la recta sencilla "s", determinada por los vértices principales V1 V2 de ambas pirámides. Seguidamente, se hallan los puntos de intersección entre esta recta y cada uno de los planos que contienen a las bases de los sólidos (δ y γ), es decir, los puntos Sδ y Sγ de la Fig. 57. En el ejemplo planteado, el punto Sδ se encuentra en el infinito, ya que la recta "s" es paralela al plano δ. Por otra parte, es preciso determinar la recta de intersección entre los planos δ y γ, ($i_{\delta\gamma}$), pues se trata de sólidos con bases no coplanarias.

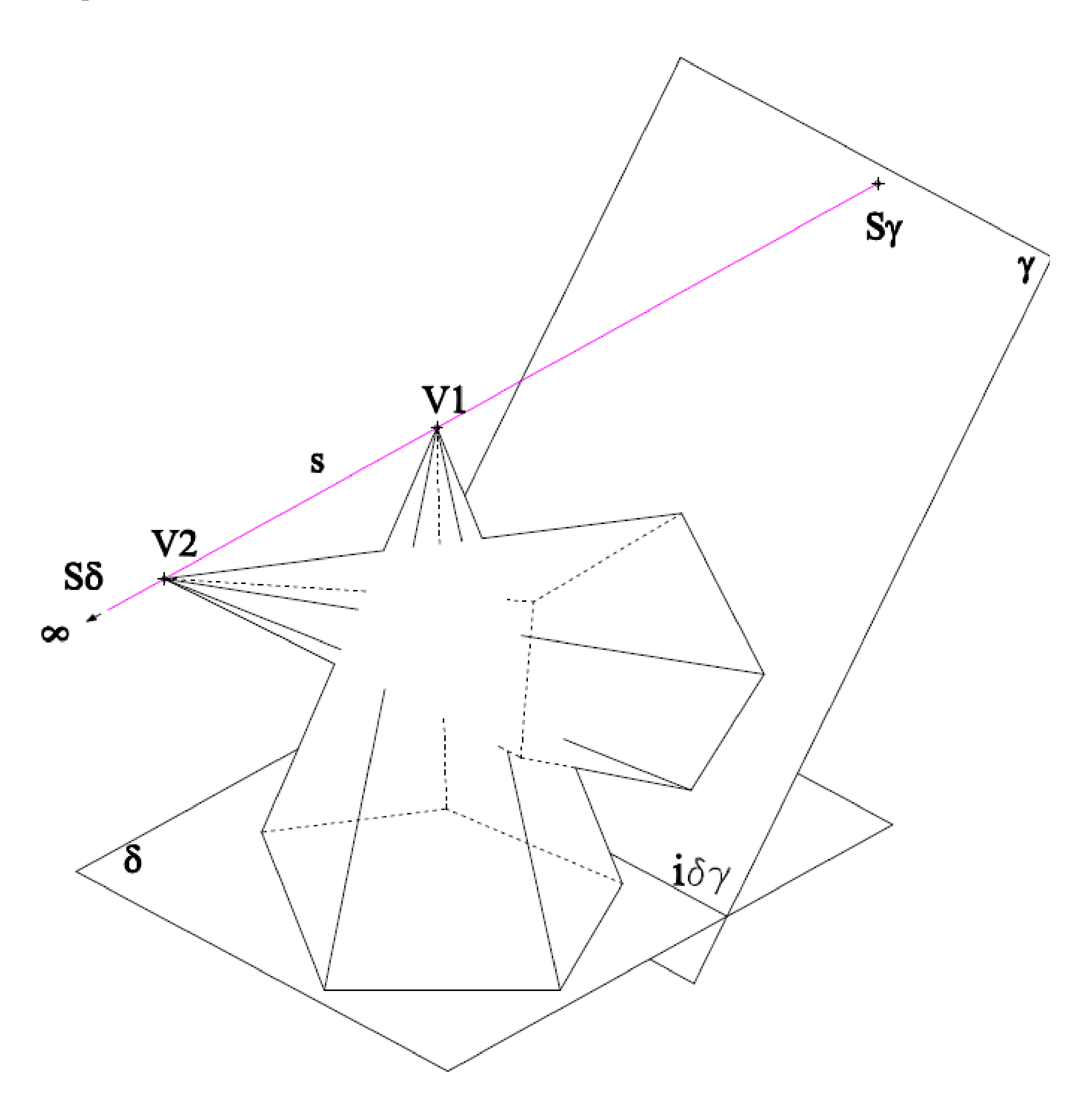


Fig.57. Intersección entre dos pirámides con bases no coplanarias. Primer paso.

2. Por cada uno de los vértices de la base contenida en el plano γ se trazan líneas rectas desde el punto Sγ. Estas líneas rectas cortarán a la intersección de ambos planos base ($i_{\delta\gamma}$), y desde estos puntos de corte se trazan rectas que pasen por Sδ. Como en el ejemplo mostrado este último punto es impropio, dichas rectas son paralelas a la recta sencilla "s" (Fig. 58). Seguidamente, se identifican los puntos de corte en las bases de los sólidos correspondientes a un mismo plano sencillo, nombrándolos de forma análoga a la seguida en los ejemplos precedentes. Nótese que ninguno de los planos de sección sencilla se pueden descartar, por lo que no existen partes impropias. Por lo tanto, se trata de una intersección del tipo *tangencial doble.*

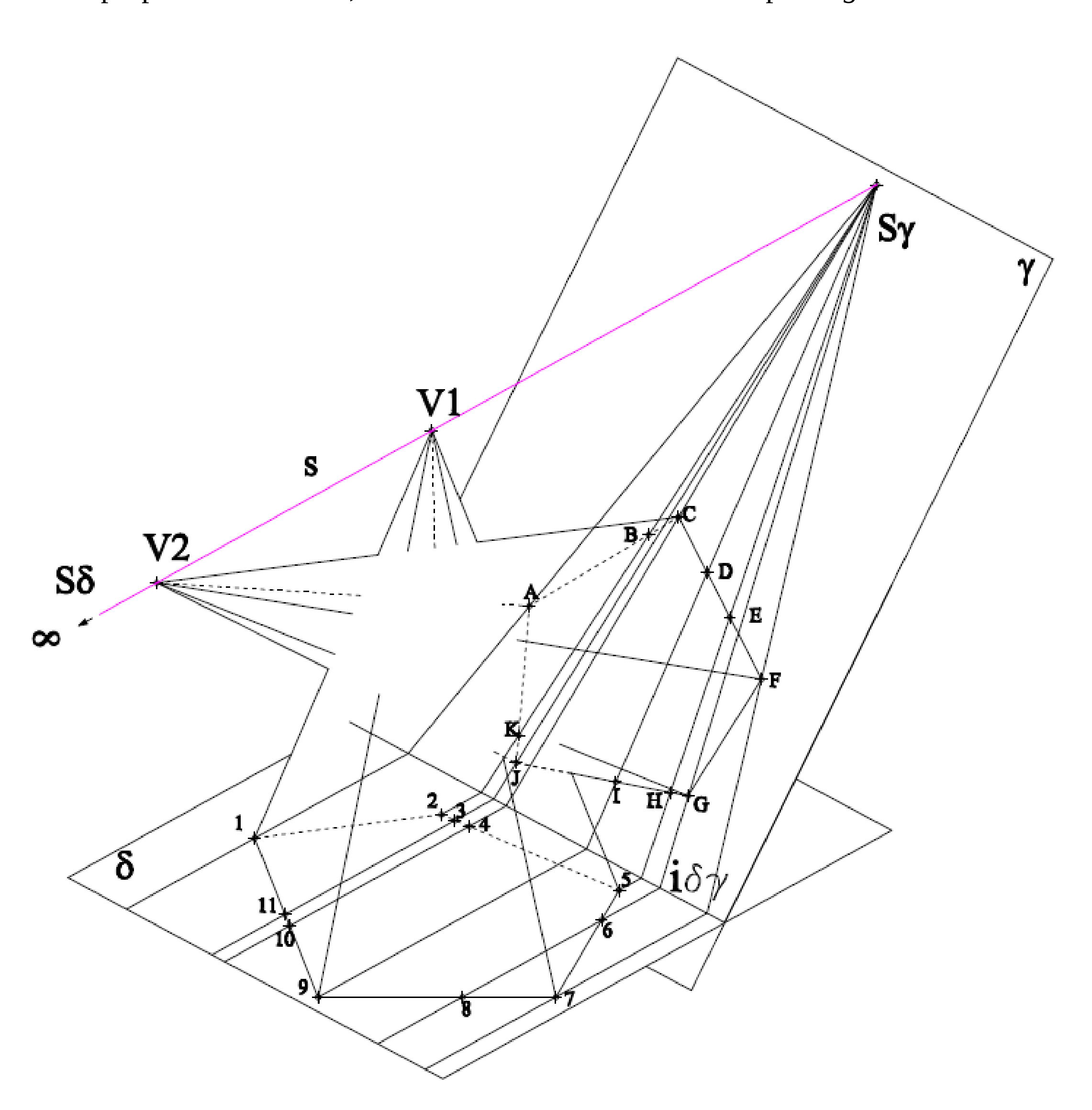


Fig.58. Intersección entre dos pirámides con bases no coplanarias. Segundo paso.

3. El paso siguiente es la determinación de la secuencia de emparejamiento. En el ejemplo mostrado, en vista de que se trata de una intersección tangencial simple y por lo tanto no existe parte impropia alguna, es conveniente suponer que uno de los sólidos posee una parte impropia infinitesimal definida por uno de los planos límite. De esta manera, el recorrido se realiza de la misma forma que en el ejemplo anterior, invirtiendo el sentido en la base de la izquierda al llegar al punto 1 (donde se ha supuesto la parte impropia infinitesimal), en tanto que en la otra base se realizan dos vueltas completas sin cambiar el sentido. El resultado es la secuencia que se muestra a continuación:

A1-B2-C4-E5-F7-G8-I9-J11-A1-C10-D9-F7-G6-H5-J3-K2-A1

Es importante notar que las parejas A1 y F7 se repiten, lo cual es de esperarse dado el tipo de intersección generada.

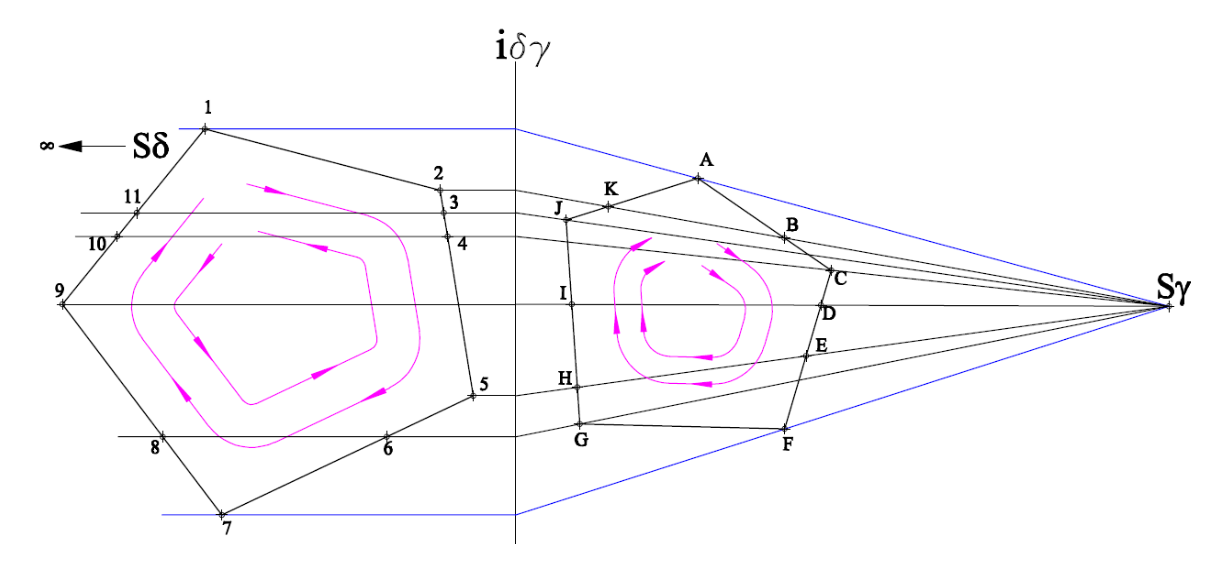


Fig.59. Intersección entre dos pirámides con bases no coplanarias. Tercer paso (determinación de la secuencia de emparejamiento).

4. Una vez establecida de secuencia de emparejamiento, se procede a encontrar los vértices de la poligonal de intersección. Para ello se construyen rectas que pasen por los puntos interesantes de cada una de la base y por el vértice principal del sólido correspondiente. Así pues, se unen los puntos señalados con números con el vértice V1, y los puntos señalados con letras, con el vértice V2.

Siguiendo el orden dado por la secuencia de emparejamiento obtenida en el paso anterior, se obtienen los vértices de la poligonal. Es conveniente determinar simultáneamente la visibilidad de cada segmento de dicha poligonal, tomando en cuenta los criterios expuestos en los ejemplos anteriores (Fig. 60).

Es importante hacer notar cómo en cada uno de los puntos dobles de la poligonal (A1 y F7) convergen cuatro segmentos de la misma. En este tipo de intersecciones es posible situar dos planos tangentes a ambos sólidos, uno a cada lado del conjunto.

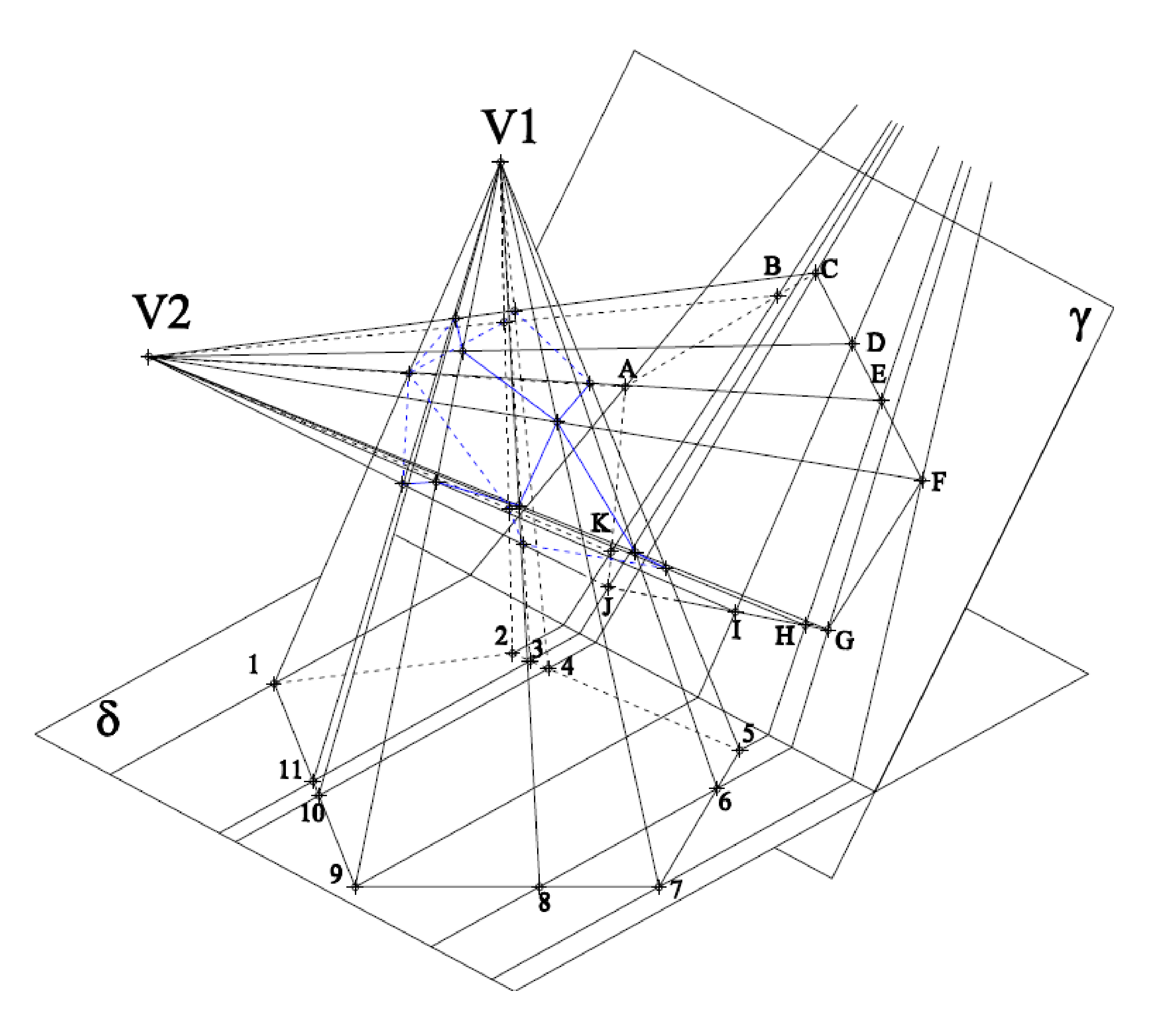


Fig. 60. Intersección entre dos pirámides con bases no coplanarias. Cuarto paso.

5. Por último, se determina la visibilidad de las aristas de ambos sólidos, siguiendo las reglas suministradas en los ejemplos anteriores (Fig. 61). Nótese cómo la poligonal

de intersección presente dos puntos en los que convergen cuatro segmentos de dicha poligonal: son estos los llamados *puntos dobles.*

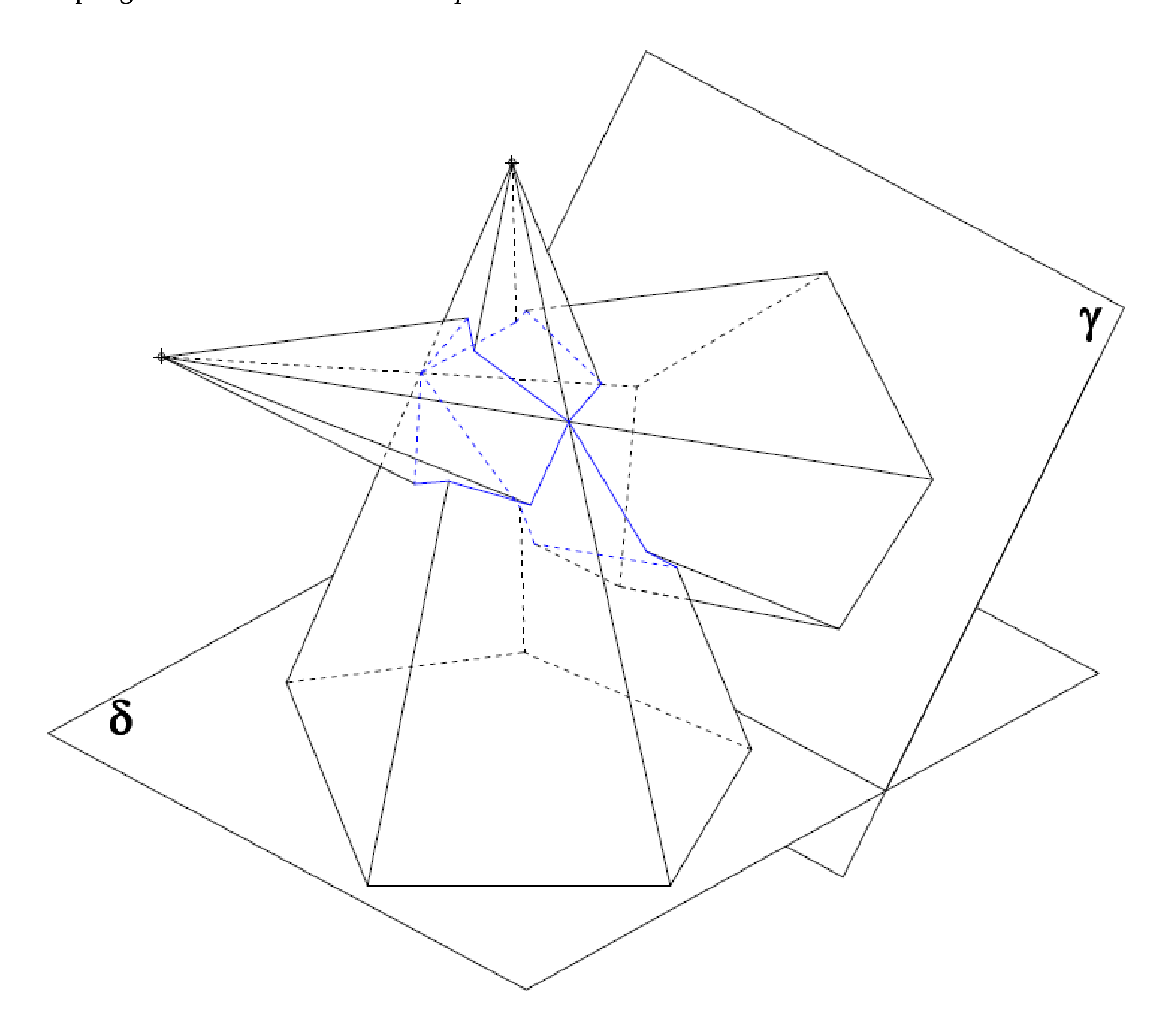


Fig. 61. Intersección entre dos pirámides con bases no coplanarias. Quinto paso.

Intersección entre un prisma y una pirámide con bases no coplanarias

1. El ejemplo que se desarrolla a continuación, plantea la intersección entre un prisma de base triangular apoyada en un plano γ y una pirámide de base pentagonal apoyada en un plano δ. La recta sencilla “s” - elemento fundamental en el procedimiento - se construye paralela al eje del prisma, pasando por el vértice principal V de la pirámide. Dicha recta interseca a los planos de base δ y γ en los puntos Sδ y Sγ, respectivamente. Por otra parte, es preciso determinar la recta de intersección entre los mencionados planos de base, denominada $i_{\delta\gamma}$ en el ejemplo (Fig. 62).

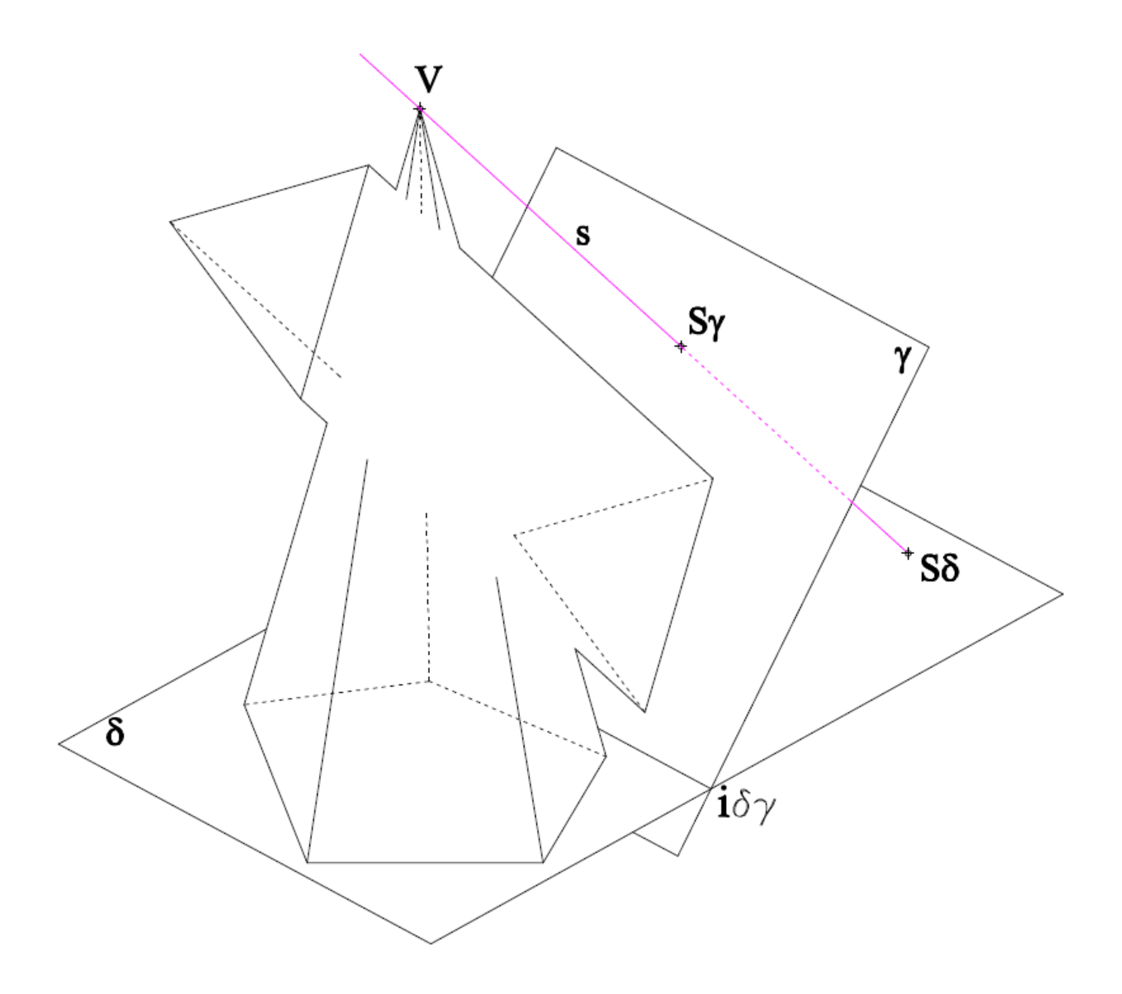


Fig. 62. Intersección entre una pirámide y un prisma con bases no coplanarias. Primer paso.

2. Seguidamente,se trazan líneas rectas desde el punto Sδ que pasen por cada uno de los vértices de la base contenida en el plano δ. Dichas líneas rectas cortarán a la

intersección de ambos planos base ($i_{\delta\gamma}$), y luego, desde estos puntos de corte se trazan rectas que pasen por el punto Sγ, las cuales cortan a la base apoyada en el plano γ(puntos A, B, C, D, E, F, H, I, J y K), como puede apreciarse en la Fig. 63. A continuación, se realiza el proceso análogo, trazando líneas desde Sγ que pasen por los vértices de la base del sólido apoyado en γ (solamente el vértice G en este ejemplo); estas líneas deben cortar a la intersección entre ambos planos, para luego ir a Sδ, generando puntos (4 y 6) en la base del sólido apoyado en el plano δ. De esta manera, se puede apreciar cómo existen dos partes impropias en el prisma (sólido apoyado en el plano γ), por lo que la intersección resultante es del tipo *penetración*.

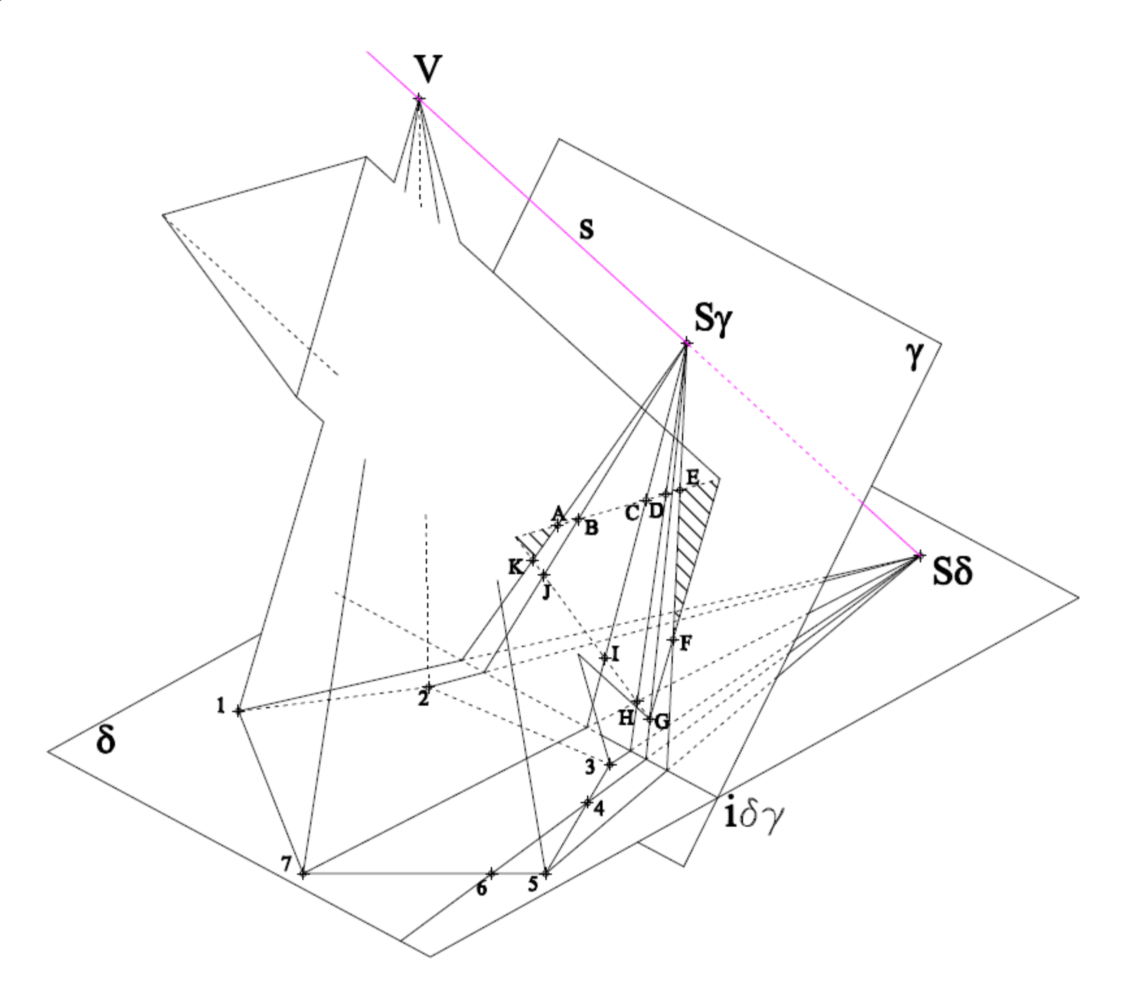


Fig. 63. Intersección entre una pirámide y un prisma con bases no coplanarias. Segundo paso.

3. Una vez determinados los puntos relevantes en cada una de las bases de los sólidos involucrados en la intersección, se procede a establecer la secuencia de emparejamiento correspondiente. Para ello, es preciso tener en cuenta el tipo de intersección generada, de manera que en la base de la pirámide (pentagonal) se deben realizar dos recorridos completos en el mismo sentido, dado que no existen partes impropias en este solido; en la base del prisma (triangular) se realiza un recorrido en "ida y vuelta" en cada sector comprendido entre las partes impropias. La Fig. 64 muestra claramente los recorridos señalados. Las secuencia resultantes - pues se trata de dos poligonales independientes - las cualesson fundamentales en el paso siguiente, son como sigue:

A1-B2-D3-E5-C7-A1

K1-J2-H3-G4-F5-G6-I7-K1

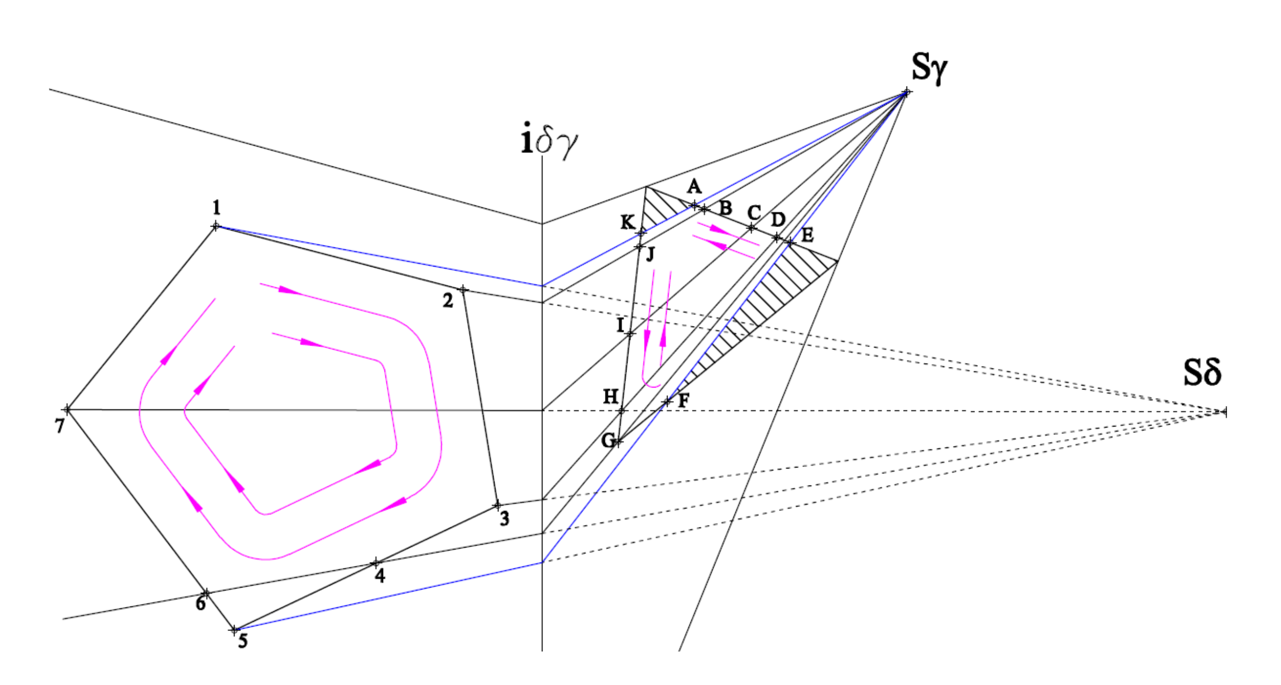


Fig. 64. Intersección entre una pirámide y un prisma con bases no coplanarias. Tercer paso.

4. Los vértices de las poligonales de intersección se obtienen de la siguiente forma: se trazan líneas paralelas al eje del prisma por los puntos relevantes de su base (A – K) y líneas convergentes en el vértice V por los puntos relevantes de la base de la pirámide (1 – 7); siguiendo las secuencias construidas en el paso anterior, se determinan los cortes correspondientes. Estos cortes – vértices de las poligonales de

intersección - se unen de acuerdo al orden anterior, estudiando de manera simultánea la visibilidad de los segmentos resultantes. Conviene recordar que un segmento de una de las poligonales es visible en una proyección, si y solo si las dos caras que lo generan son visibles (Fig. 65).

A la hora de resolver este tipo de ejercicios en sistema diédrico, es importante tener en cuenta que la visibilidad de los segmentos de las poligonales debe ser analizada en cada una de las dos proyecciones. Por ello, se recomienda realizar un concienzudo repaso de los conceptos, procedimientos y técnicas relacionadas con la representación de diferentes elementos geométricos en ese sistema de proyección.

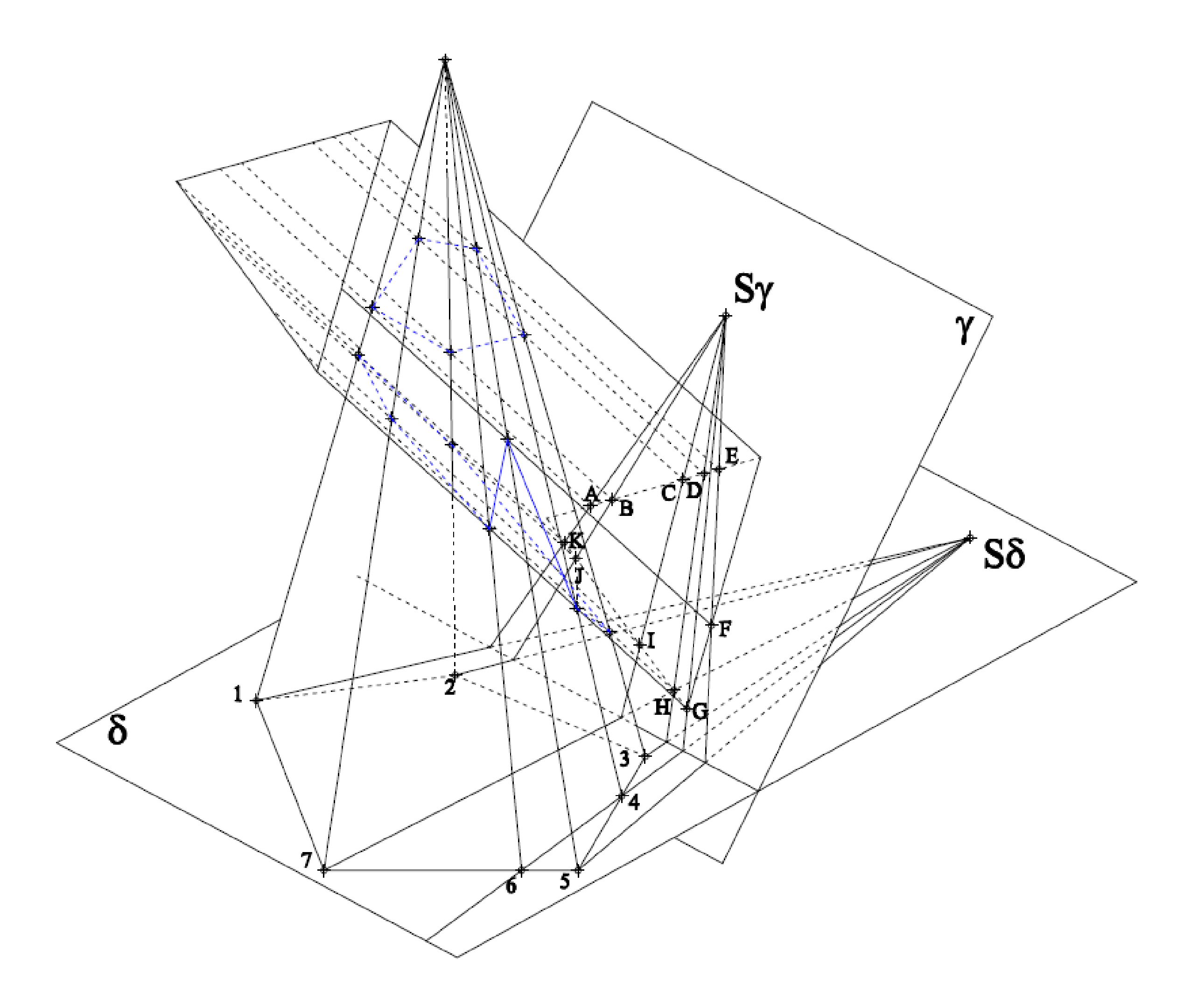


Fig. 65. Intersección entre una pirámide y un prisma con bases no coplanarias. Cuarto paso.

5. Por último, se debe estudiar la visibilidad de las aristas de ambos sólidos involucrados en la intersección, atendiendo al criterio ya mencionado en los ejemplos anteriores (Fig. 66). Este estudio debe realizarse para cada una de las dos proyecciones del sistema diédrico.

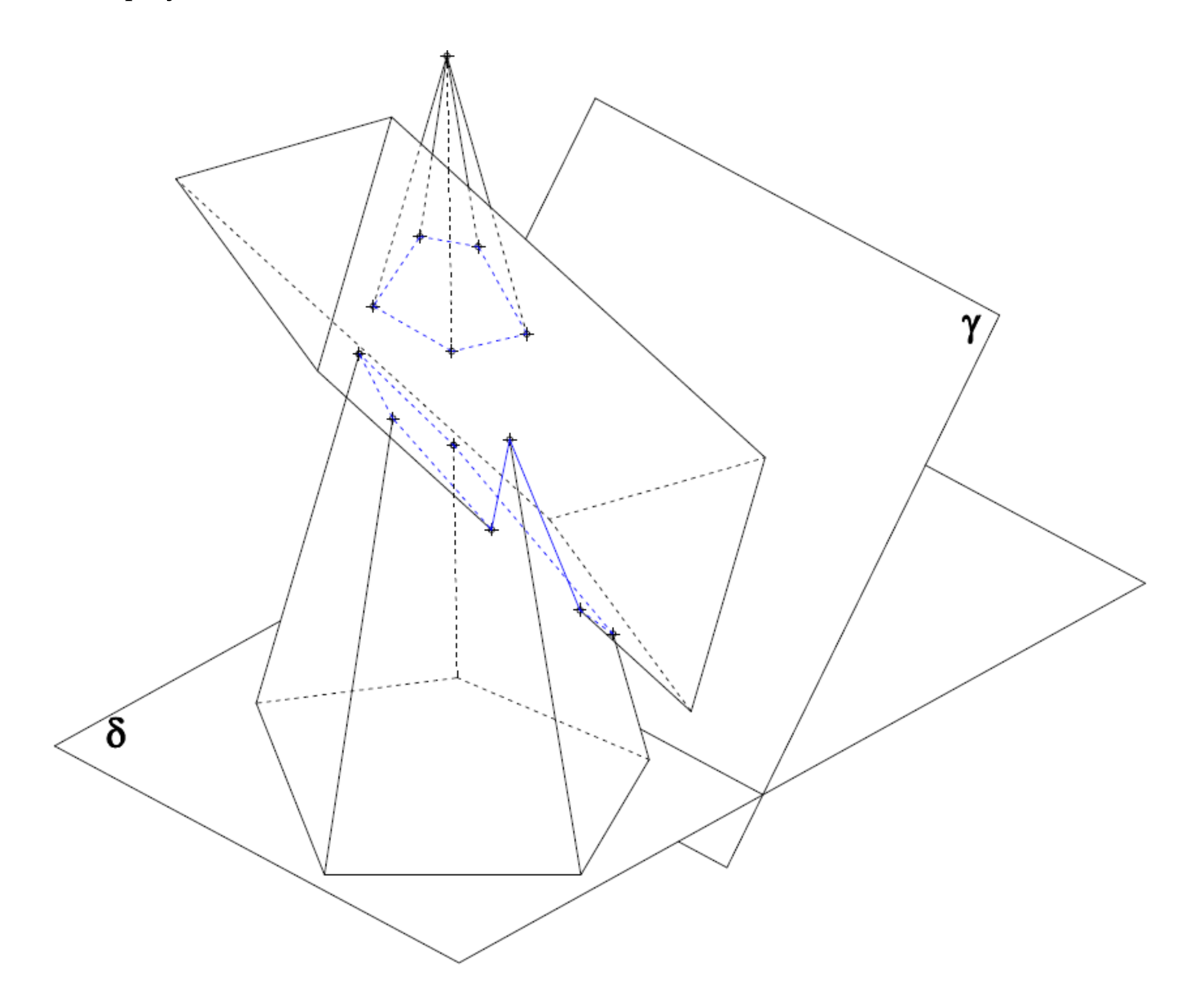


Fig. 66. Intersección entre una pirámide y un prisma con bases no coplanarias. Quinto paso y resultado final.

Intersección entre dos prismas de bases no coplanarias

1. Sean dos primas cuyas bases se encuentran contenidas en planos distintos δ y γ, como los que se muestran en la Fig.67. El primer paso consiste en determinar la recta de intersección entre ambos planos de base($i_{\delta\gamma}$) y construir el *plano sencillo* (σ). Este plano se define tomando un punto cualquiera Q del espacio y construyendo un par de rectas (“a” y “b”) que pasen por dicho punto, cada una de las cuales debe ser paralela al eje de uno de los sólidos. Además, es preciso determinar las rectas de intersección entre el plano sencillo y cada uno de los planos de base ($i_{\gamma\sigma}$, $i_{\delta\sigma}$).

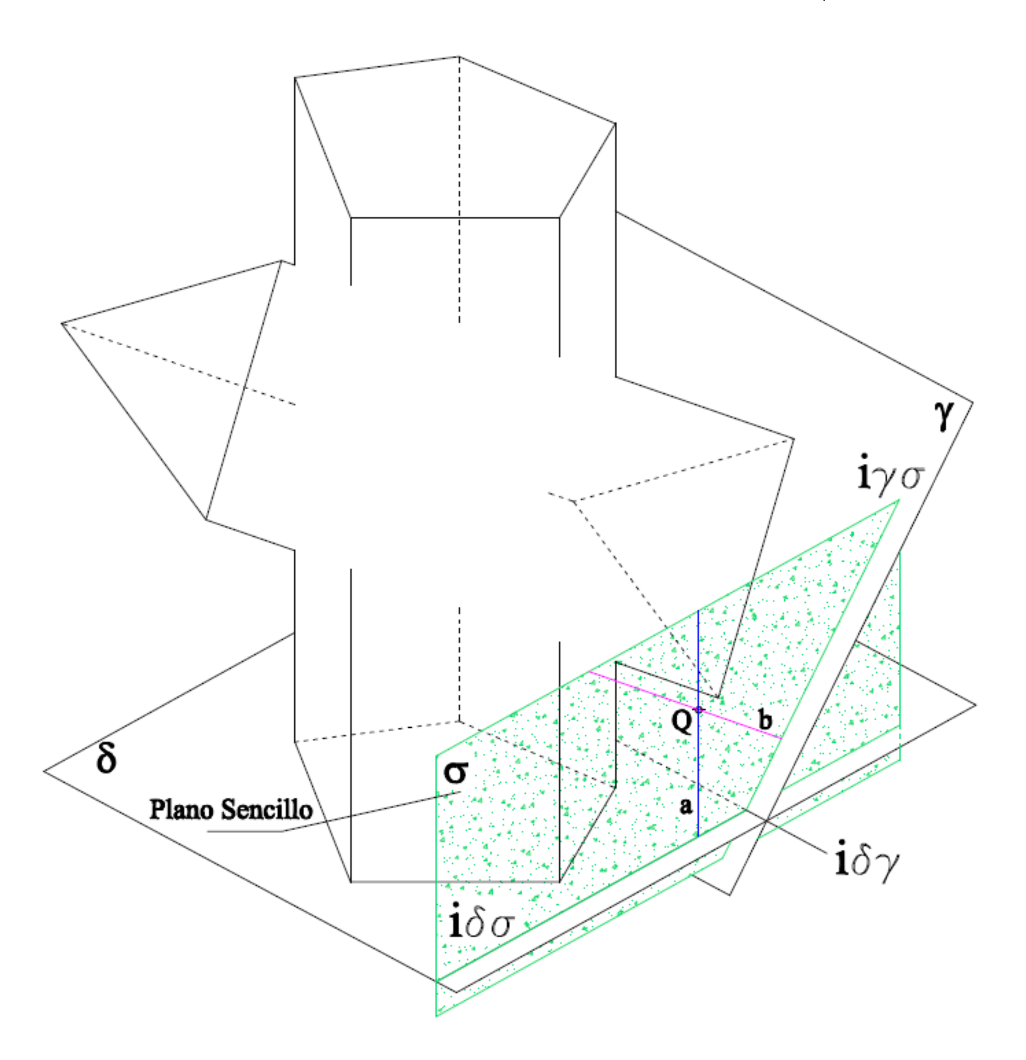


Fig. 67. Intersección entre dos prismas con bases no coplanarias. Primer paso.

2. Hecho la anterior, el siguiente paso consiste en determinar las intersecciones de los diferentes planos de sección de sencilla con ambos planos de base. Para ello, se construyen

rectas paralelas a $i_{\delta\sigma}$por los vértices de la base apoyada en el plano d; tales rectas cortan a la intersección entre ambos planos de base, y desde estos cortes se trazan líneas paralelas a$i_{\gamma\sigma}$, las cuales determinan puntos de corte en la base del otro sólido.

Seguidamente, se realiza el procedimiento inverso, trazando paralelas a $i_{\gamma\sigma}$ por los vértices de la base apoyada en el plano γ, que cortan a la intersección de ambos planos base, para luego trazar, desde los cortes obtenidos, líneas paralelas a $i_{\delta\sigma}$, obteniéndose puntos de corte en la base contenida en el plano δ.

Determinados los puntos aludidos, se identifican los planos límite y las partes impropias (si existen), para luego nombrar esos puntos en cada una de las dos bases, asignando letras en un una de ellas y números en la otra (Fig. 68).

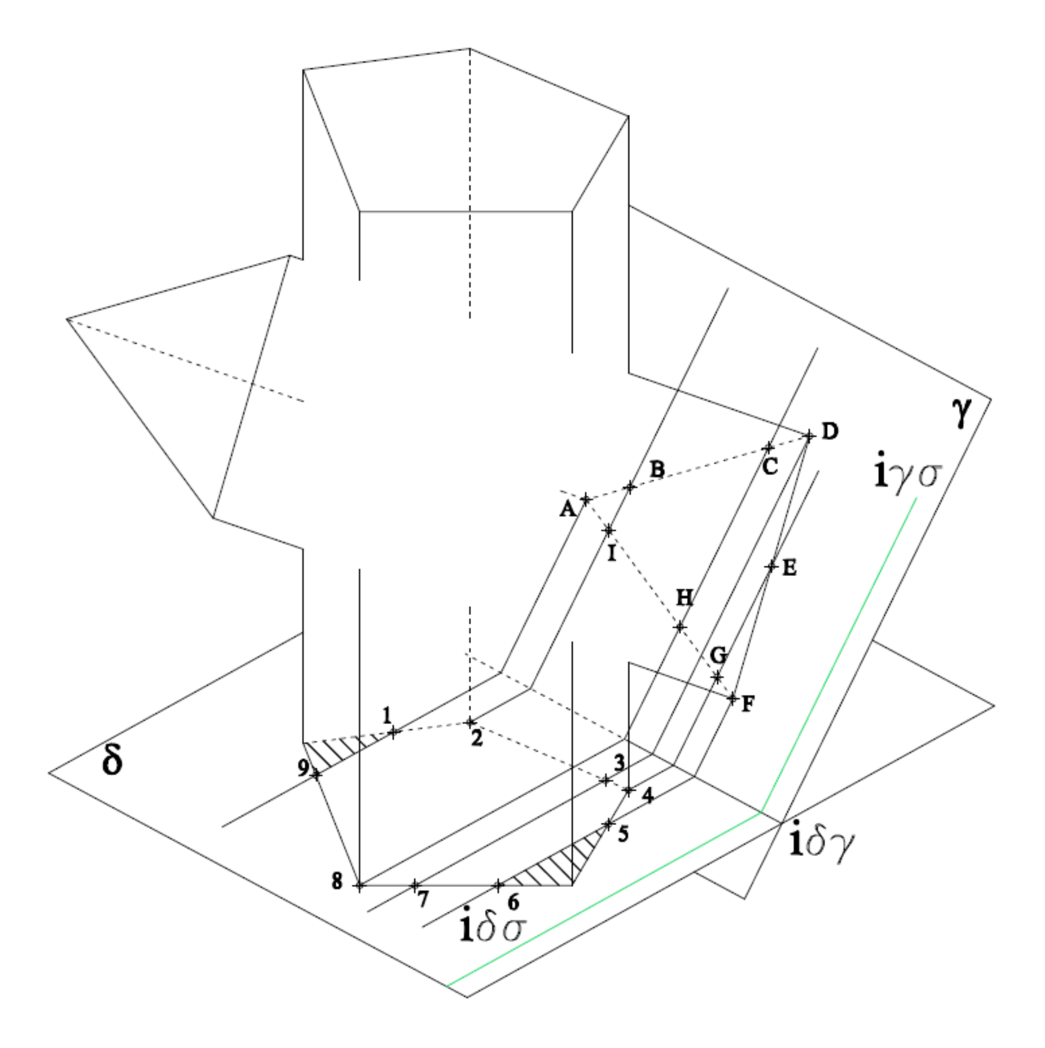


Fig. 68. Intersección entre dos prismas con bases no coplanarias. Segundo paso.

3. Una vez determinados los puntos relevantes en cada una de las dos bases, es posible identificar el tipo de intersección, la cual es, en este ejemplo, una *penetración*, siendo el prisma de base pentagonal quien "penetra" completamente al prisma triangular, ya que es en aquél sólido donde se presentan dos partes impropias. Se procede, entonces, a encontrar la secuencia de emparejamiento correspondiente a cada una de las dos poligonales de intersección resultantes, recordando que en la base pentagonal se debe realizar un recorrido (ida y vuelta) por cada porción comprendida entre las partes impropias. Esta etapa se ilustra en la Fig. 69, desembocando en las siguientes secuencias:

A1-B2-D3-E4-F5-G4-I2-A1

A9-C8-D7-F6-H8-A9

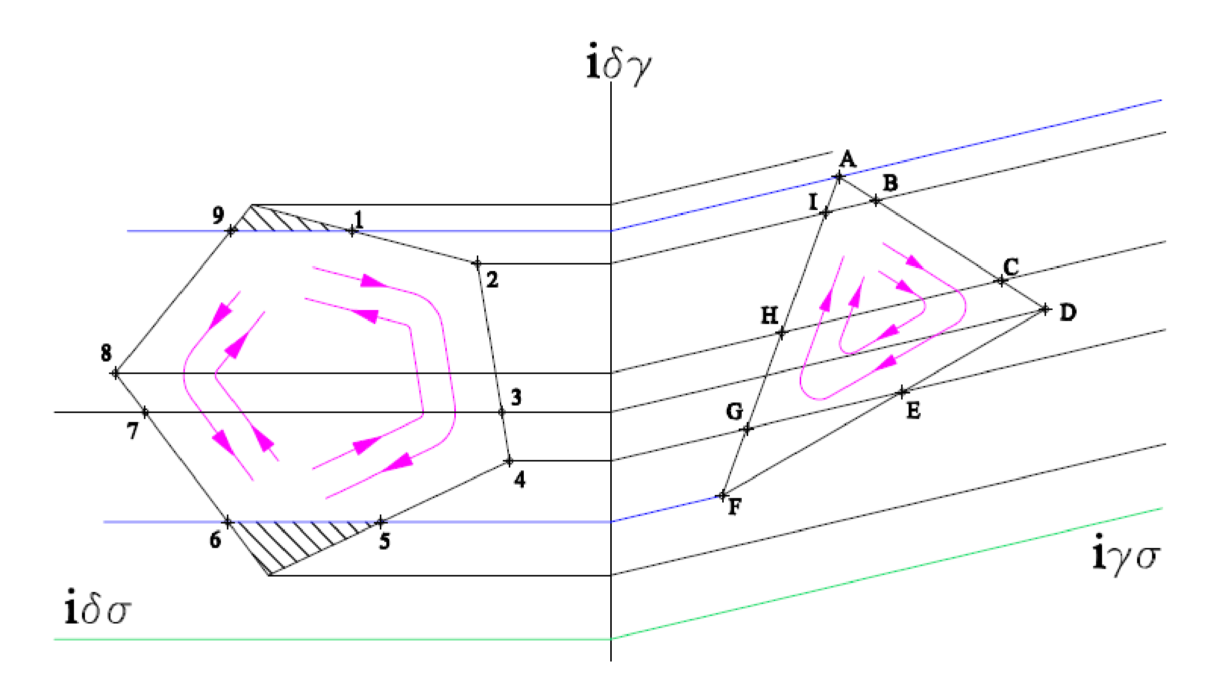


Fig. 69. Intersección entre dos prismas con bases no coplanarias. Tercer paso.

Ambas secuencias deben iniciar y culminar en la misma pareja (A1 y A9 en el ejemplo). Como la intersección de los sólidos no es del tipo tangencial, ninguna pareja debe repetirse, aparte, claro está, de las iniciales. Además, cada número o letra correspondiente a un vértice de base debe aparecer dos veces (B2 e I2, D3 y D7, por ejemplo). Estos son detalles útiles a fin de evaluar el trabajo realizado.

4. Para encontrar los vértices de ambas poligonales de intersección, se trazan rectas paralelas al eje de cada sólido por los puntos relevantes de la base respectiva, siguiendo, claro está, las secuencias anteriores (Fig. 70). Al mismo tiempo, se establece la visibilidad de cada segmento de la poligonal, atendiendo a los criterios ya enunciados.

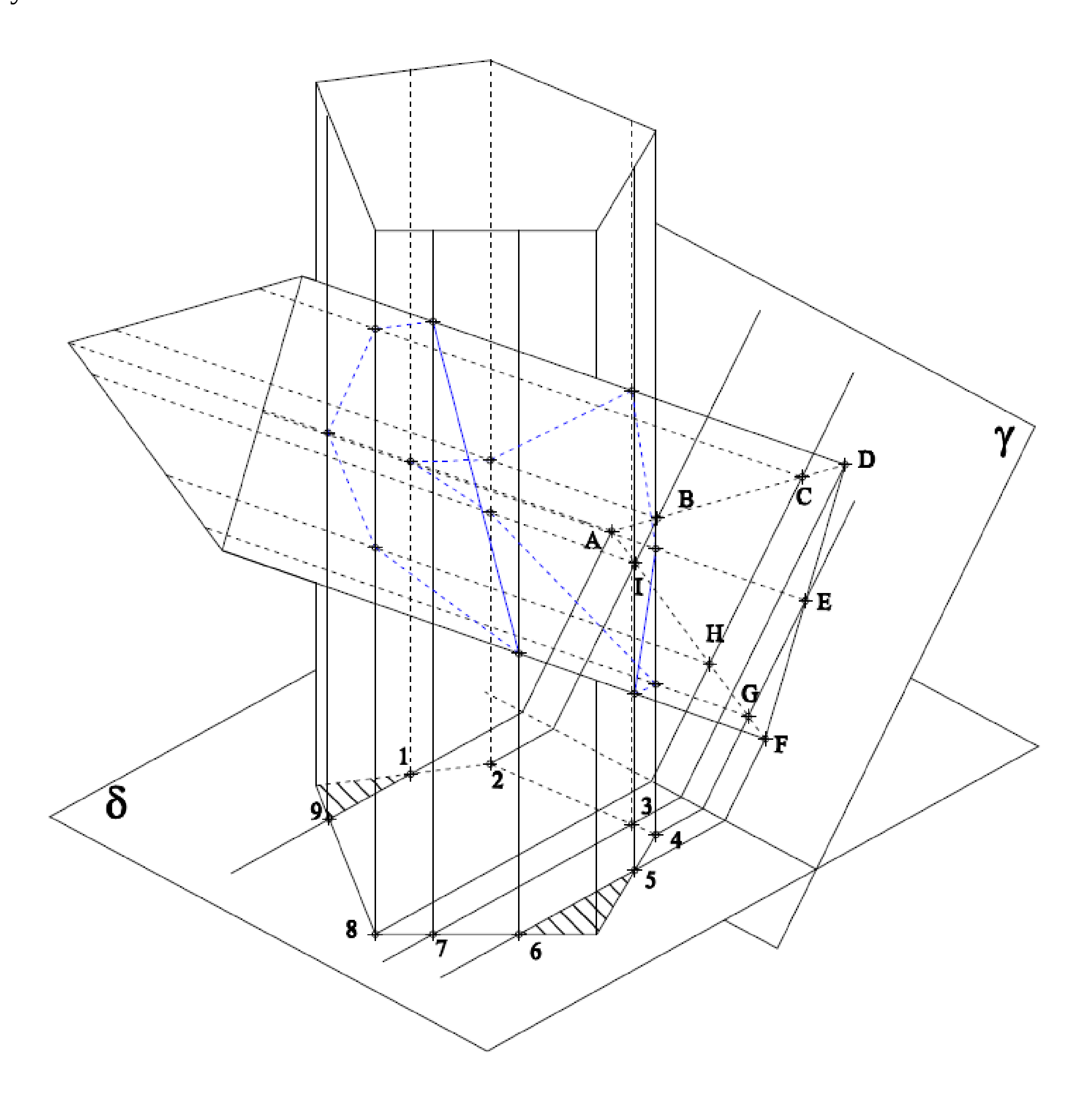


Fig. 70. Intersección entre dos prismas con bases no coplanarias. Cuarto paso.

5. Para finalizar, es menester establecer la visibilidad de las aristas de ambos sólidos involucrados en la intersección, siguiendo para ello los lineamientos explicados en ejemplos anteriores. Vale la pena apuntar – a riesgo de ser repetitivo – que, a la hora de resolver ejercicios en sistema diédrico, la visibilidad del conjunto debe ser

analizada en ambas proyecciones (horizontal y vertical), poniendo en práctica las habilidades de visualización espacial desarrolladas previamente.

La Fig. 71 muestra el resultado final. Nótese la importancia de emplear adecuadamente diferentes grosores de línea en la representación.

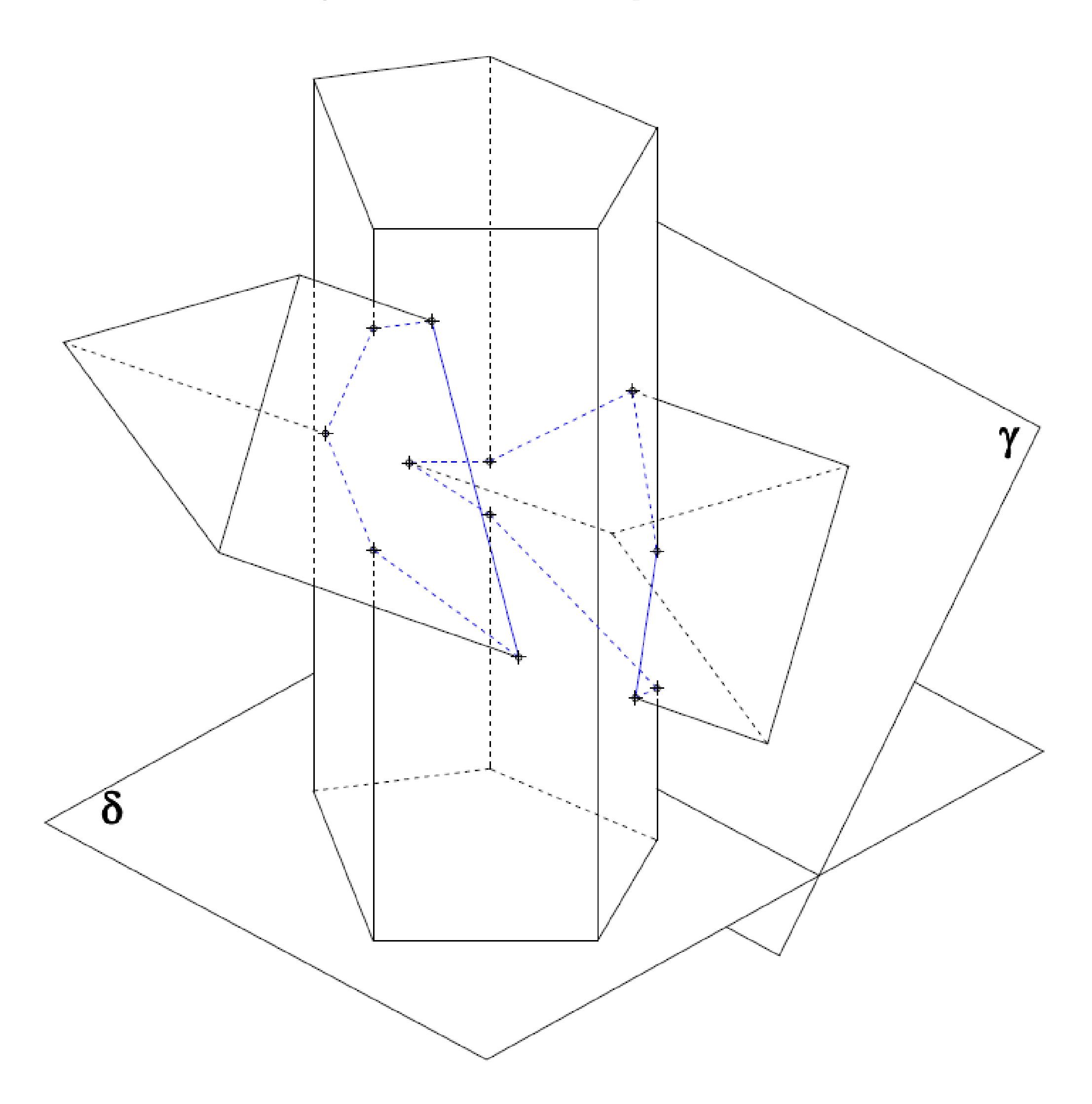
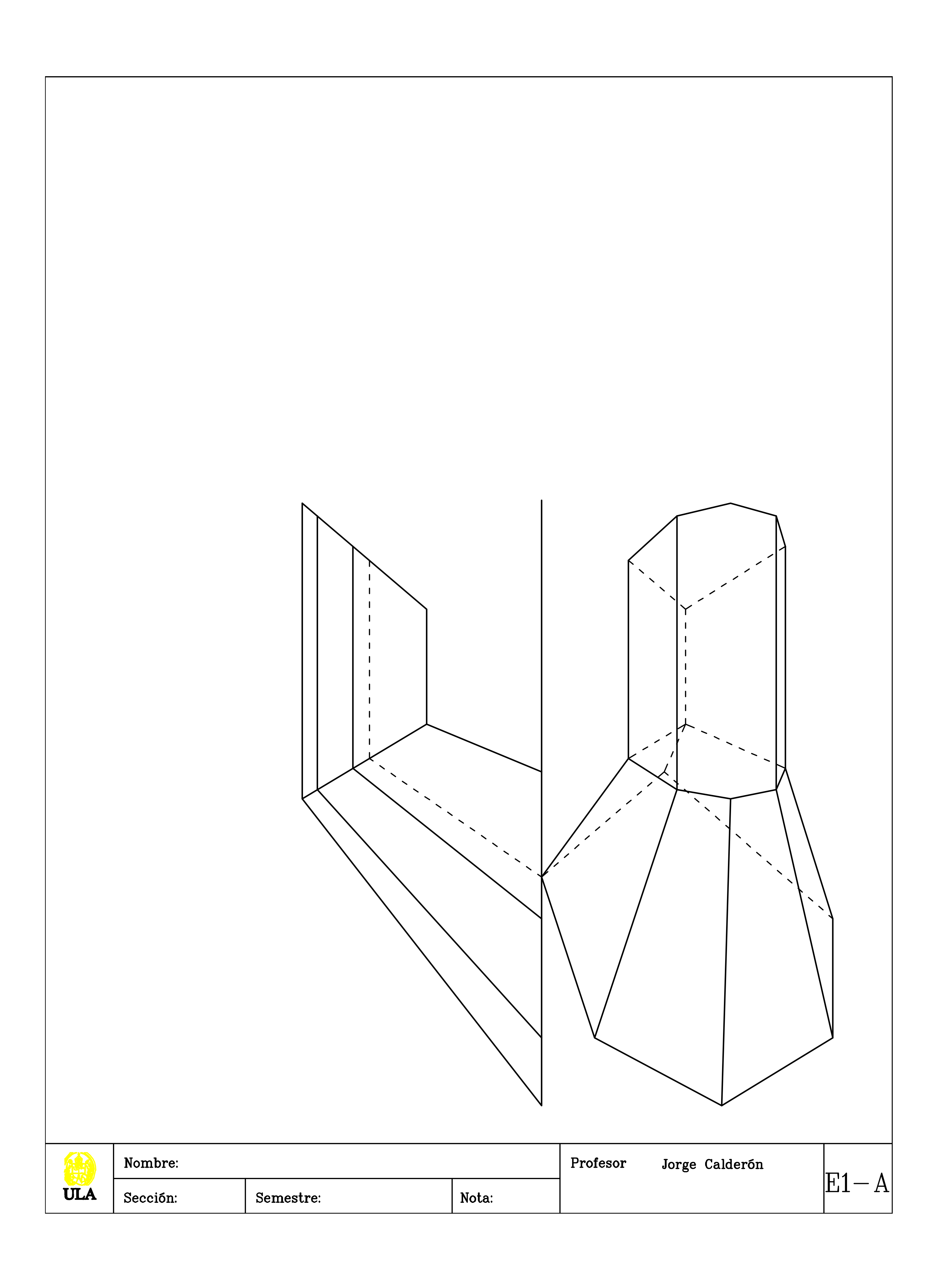


Fig. 71. Intersección entre dos prismas con bases no coplanarias. Quinto paso y resultado final.

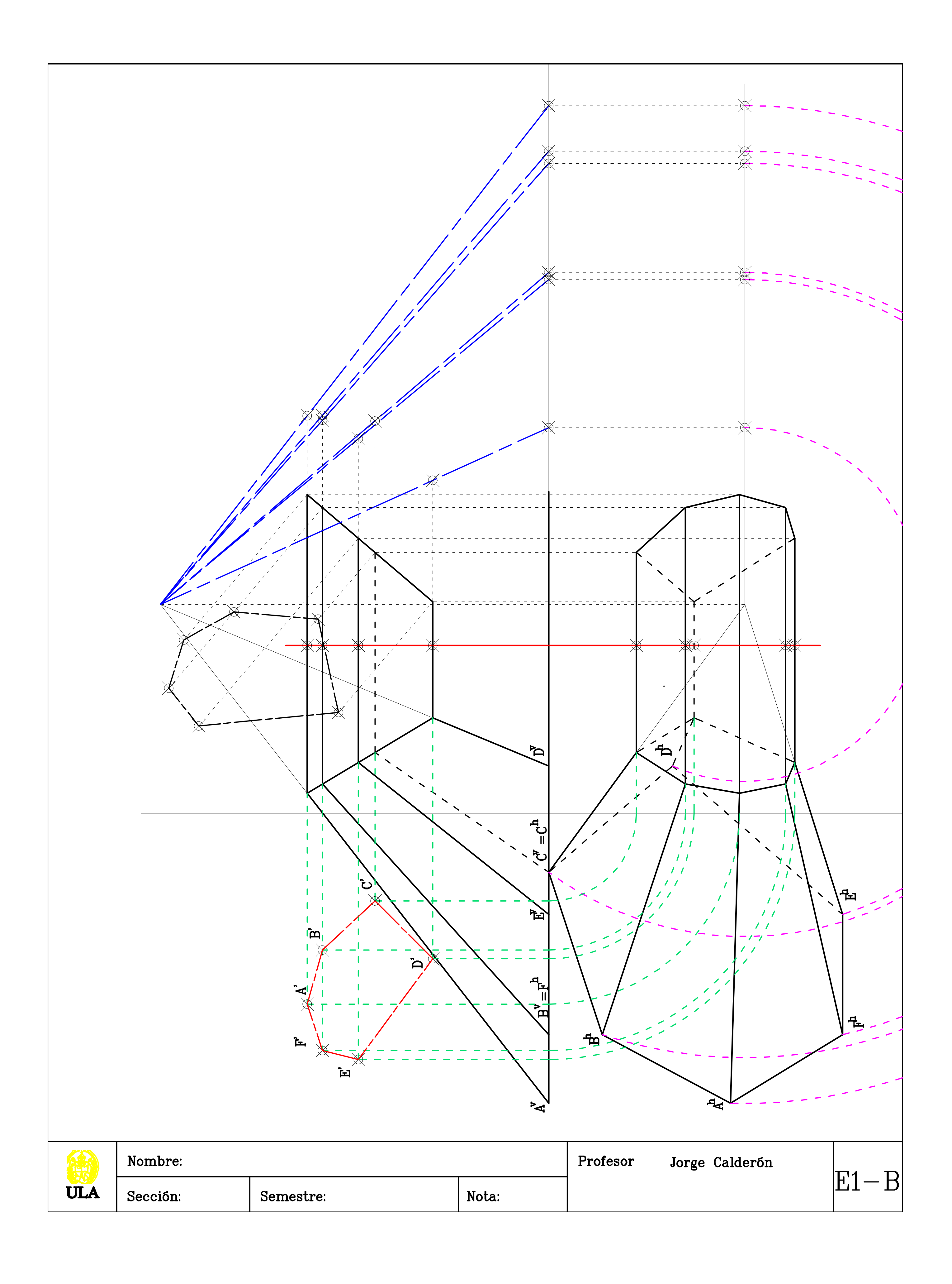
EJERCICIOS RESUELTOS

En este apartado se presenta una serie de ejercicios tipo diseñados y resueltos por el autor. La intención es la de suministrar al lector material práctico que le sea útil en el proceso de comprensión y perfeccionamiento de los métodos abordados en esta obra. En cada caso se muestra el ejercicio propuesto, seguido del desarrollo procedimental gráfico correspondiente y del resultado final. Se espera que tal información contribuya con el desarrollo de las competencias geométricas requeridas para transferir el conocimiento alcanzado a situaciones prácticas.

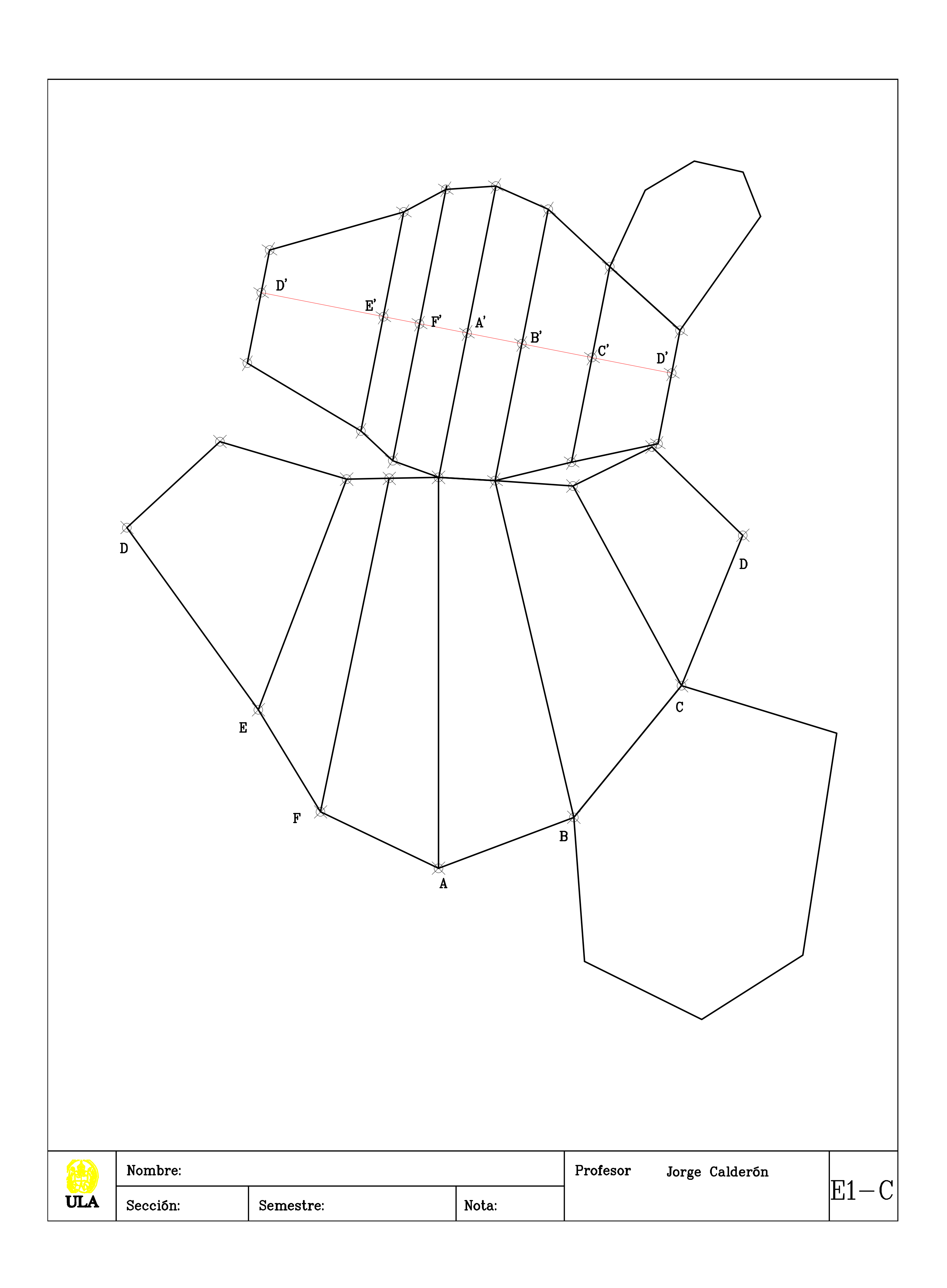
- E1: Desarrollo de un poliedro compuesto por una pirámide oblicua truncada y un prisma oblicuo truncado.
- E2: Desarrollo de un sólido curvo compuesto por un cilindro recto de revolución truncado y un cono elíptico oblicuo truncado.
- E3: Desarrollo de un sólido curvo compuesto por un cono recto de revolución truncado y un cilindro elíptico oblicuo truncado.
- E4: Intersección entre dos pirámides cuyas bases se encuentran contenidas en un plano paralelo a la línea de tierra. Método de secciones sencillas.
- E5: Intersección entre un prisma y una pirámide, ambos con su base contenida en el plano horizontal de proyección del sistema diédrico. Método de secciones sencillas.
- E6: Intersección entre dos prismas, ambos con su base contenida en el plano horizontal de proyección del sistema diédrico. Método de secciones sencillas.
- E7: Intersección entre una pirámide y un prisma, la primera con base contenida en el plano horizontal de proyección del sistema diédrico, y el segundo con base contenida en un plano proyectante vertical. Método de secciones sencillas.
- E8: Intersección entre una pirámide y un prisma, la primera con base contenida en un plano horizontal, y el segundo con base contenida en el plano vertical de proyección del sistema diédrico. Método de secciones sencillas.
- E9: Intersección entre dos prismas con bases contenidas en planos diferentes (ambos planos en posición accidental. Método de secciones sencillas.

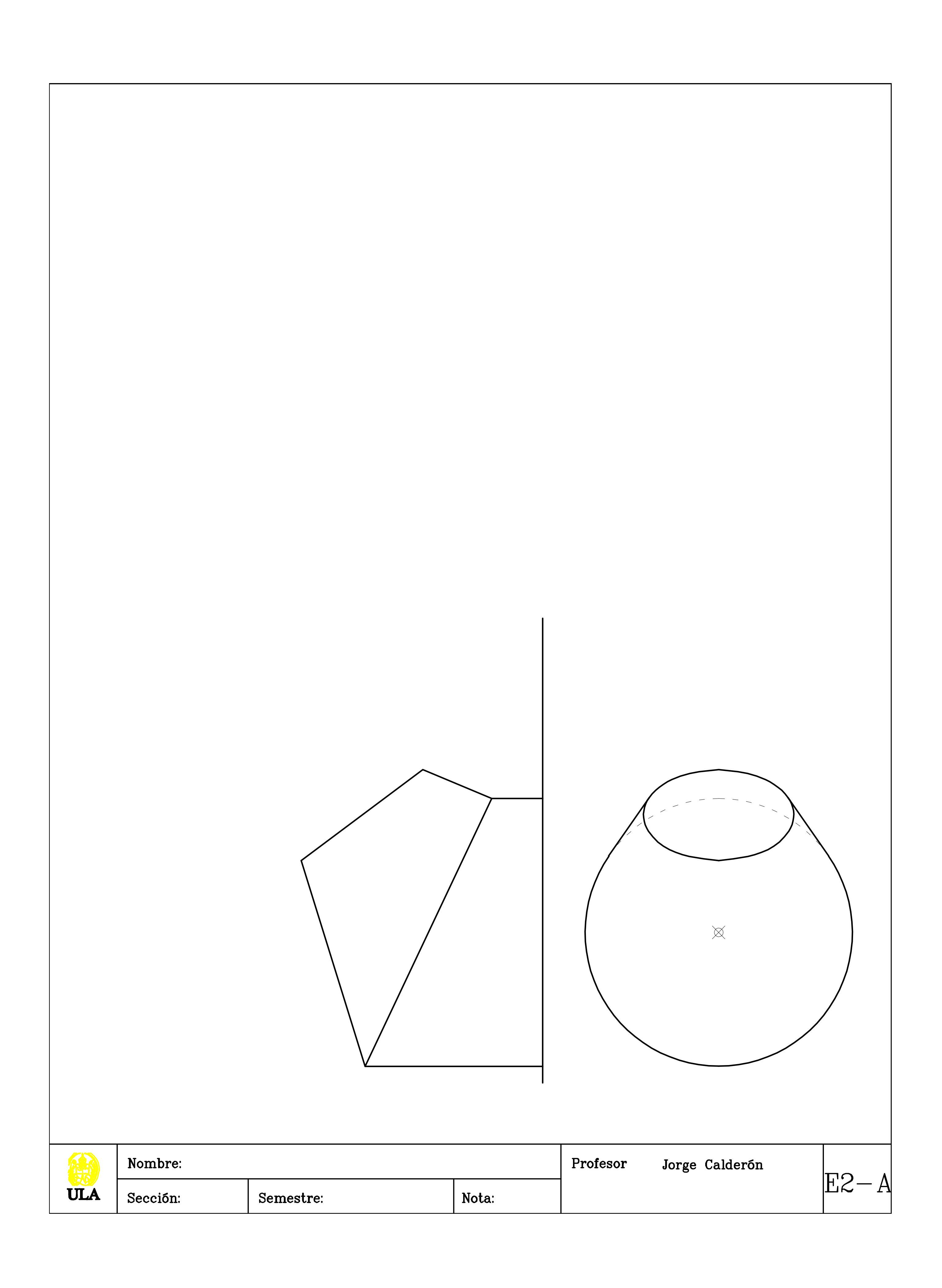


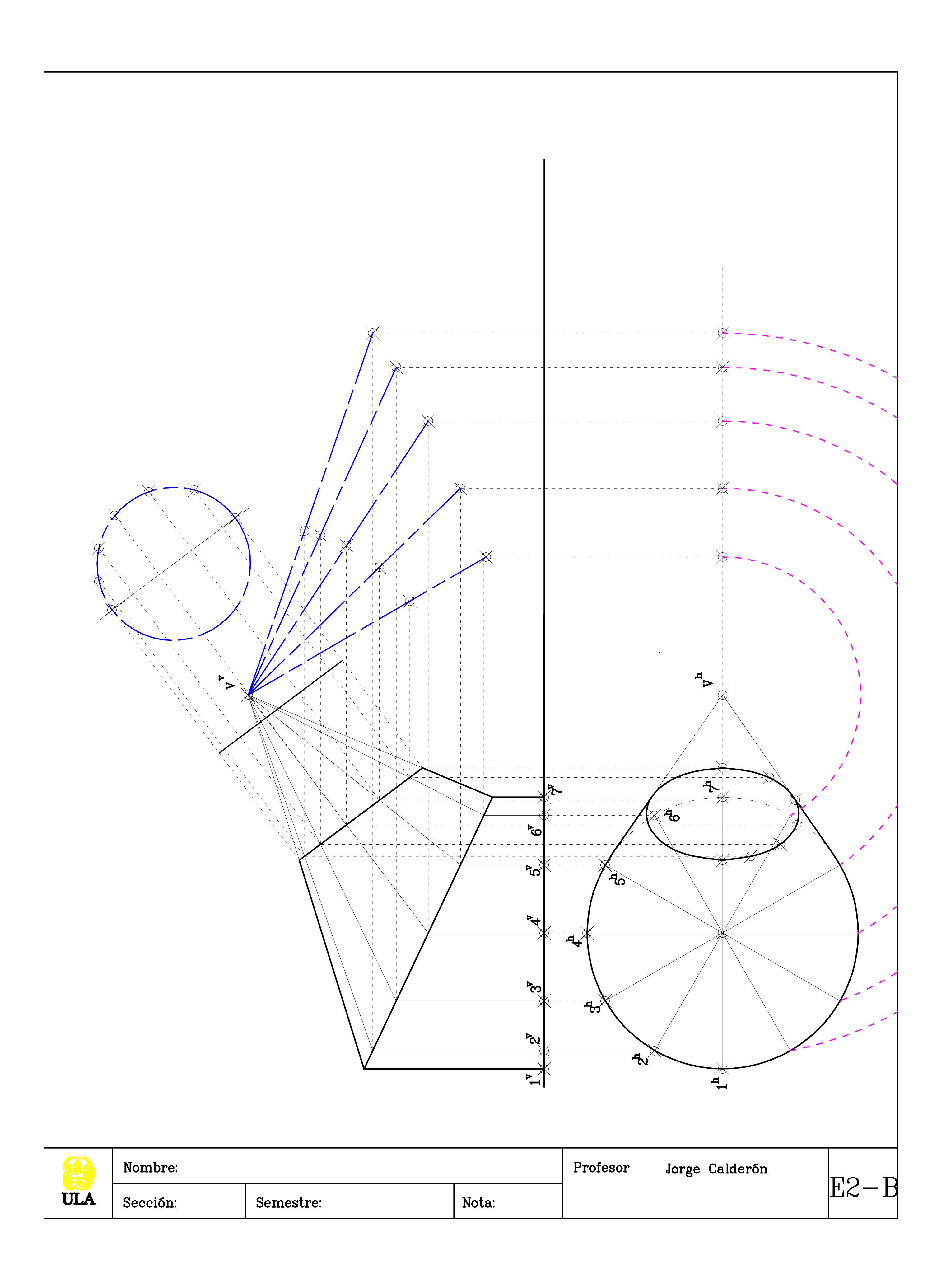
ULA
Nombre:
Sección:
Semestre:
Nota:
Profesor
Jorge Calderón
E1–A



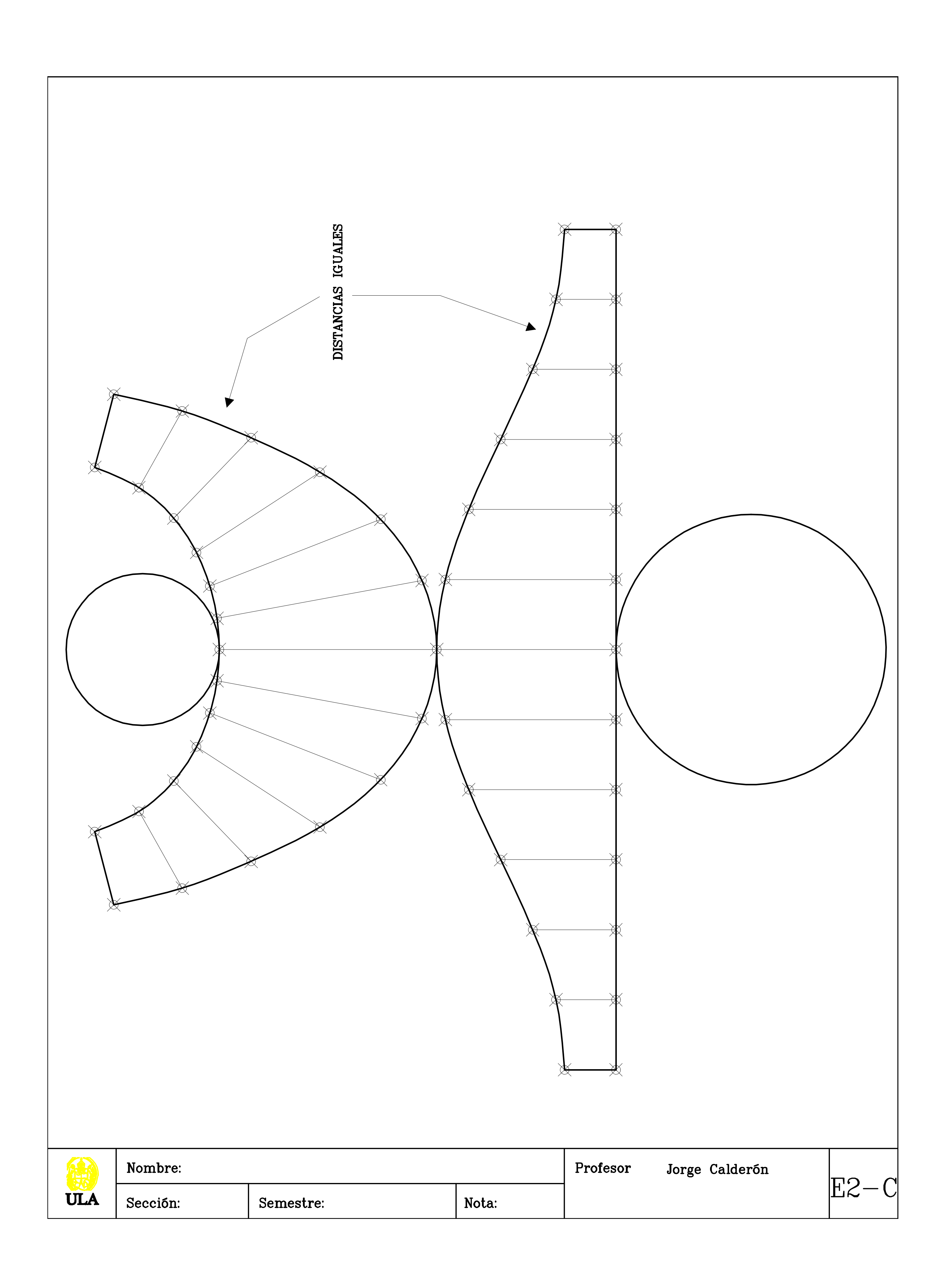
D^v
C^v = C^h
E^v
B^v = F^h
A^v
C'
B'
D'
A'
F'
E'
D^h
E^h
F^h
B^h
A^h
Nombre:
Sección:
Semestre:
Nota:
Profesor
Jorge Calderón
ULA
E1–B

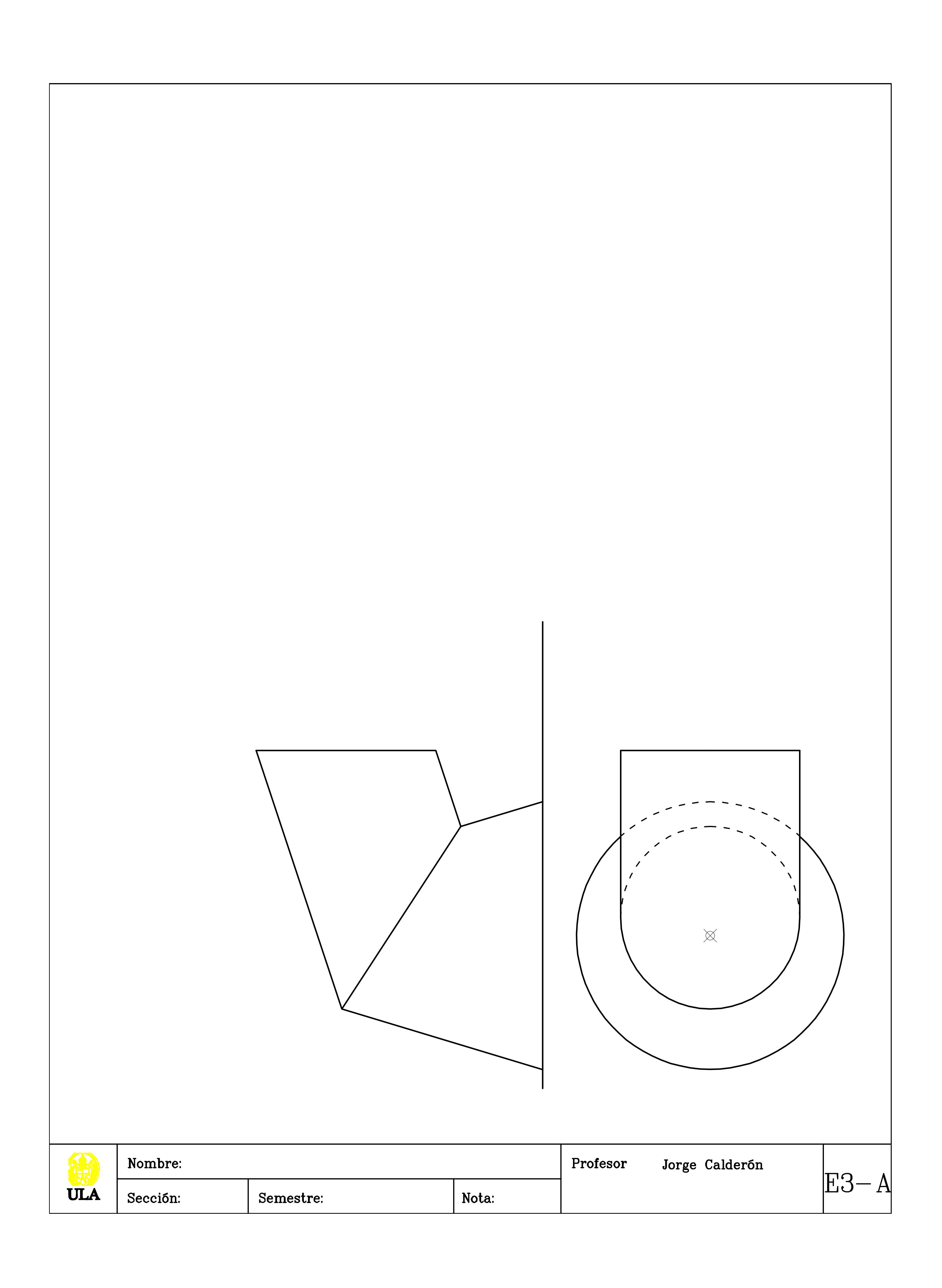

D'
E'
F'
A'
B'
C'
D'
D
D
E
C
F
B
A
ULA
Nombre:
Sección:
Semestre:
Nota:
Profesor
Jorge Calderón
E1-C

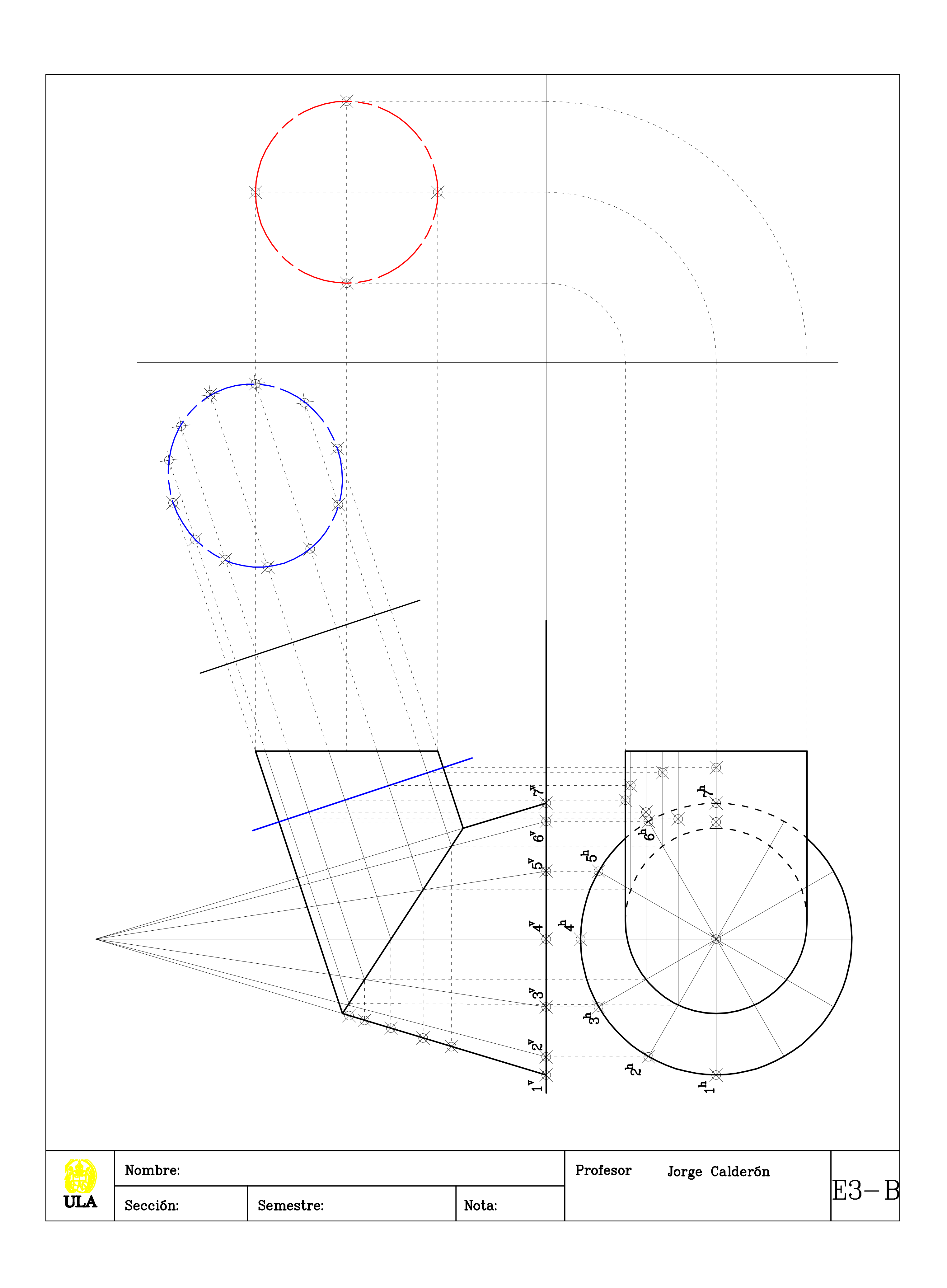

ULA
Nombre:
Sección:
Semestre:
Nota:
Profesor
Jorge Calderón
E2-A

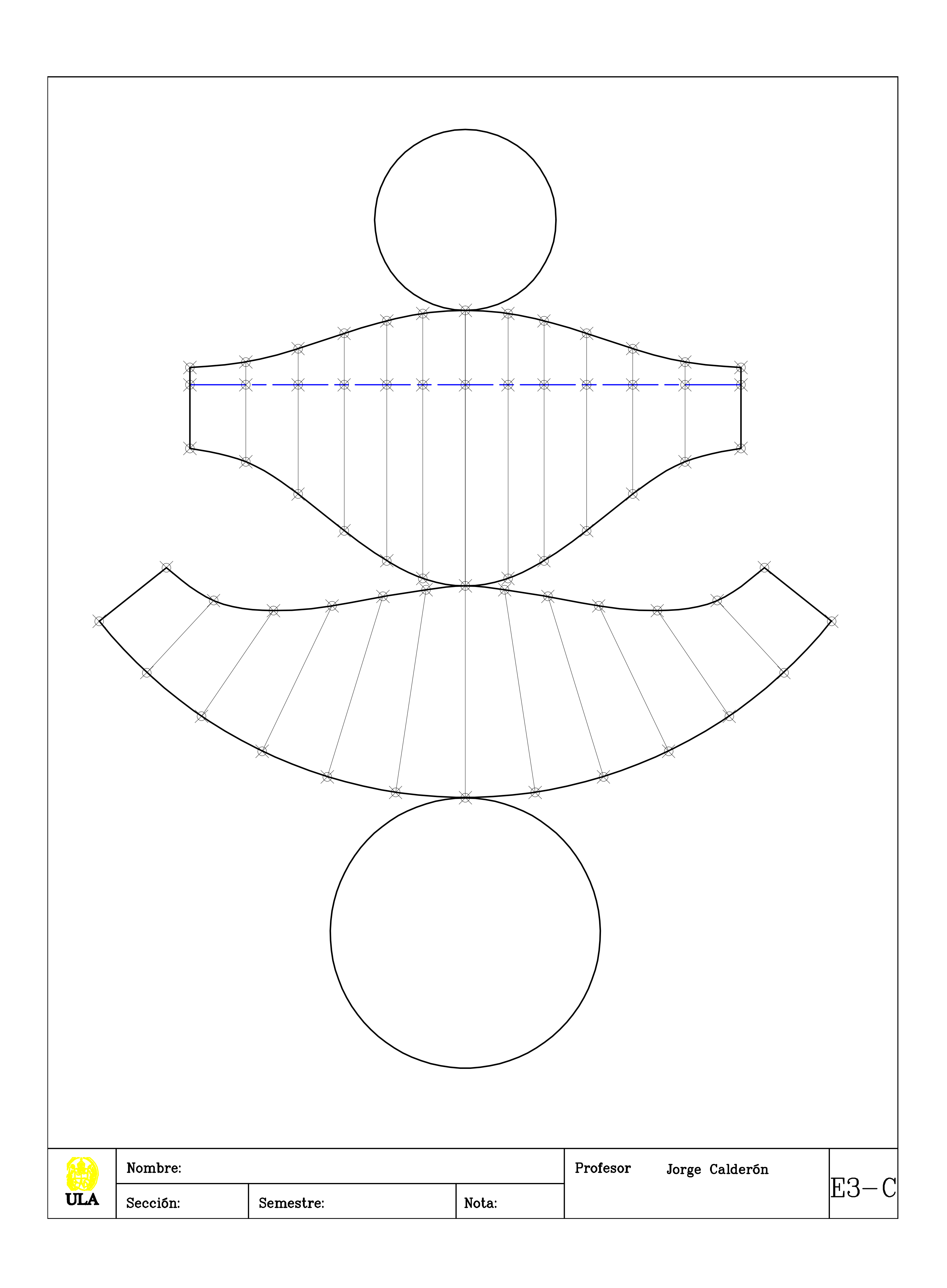


ULA
Nombre:
Sección:
Semestre:
Nota:
Profesor
Jorge Calderón
E2-B

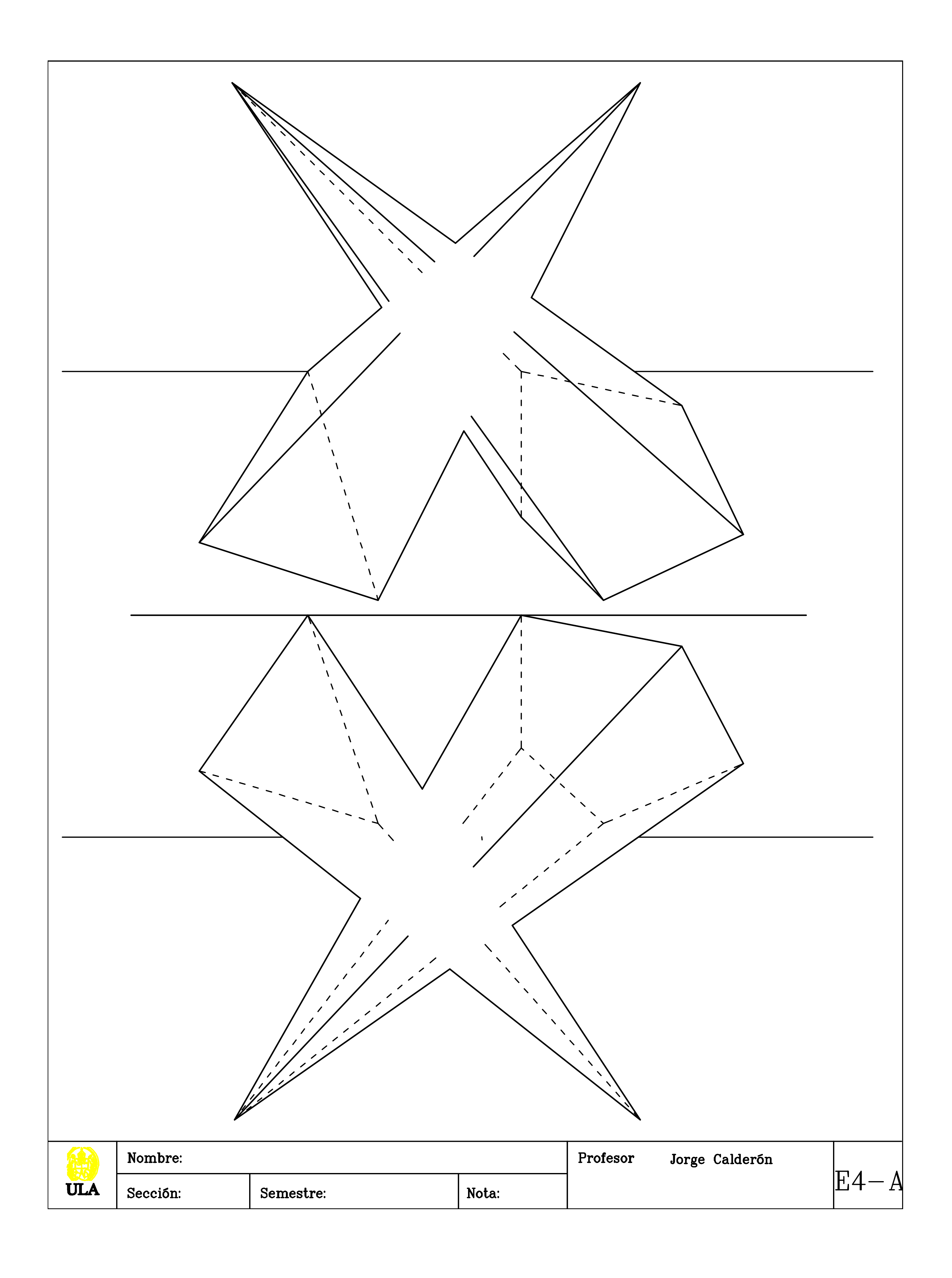

DISTANCIAS IGUALES
ULA
Nombre:
Sección:
Semestre:
Nota:
Profesor
Jorge Calderón
E2-C

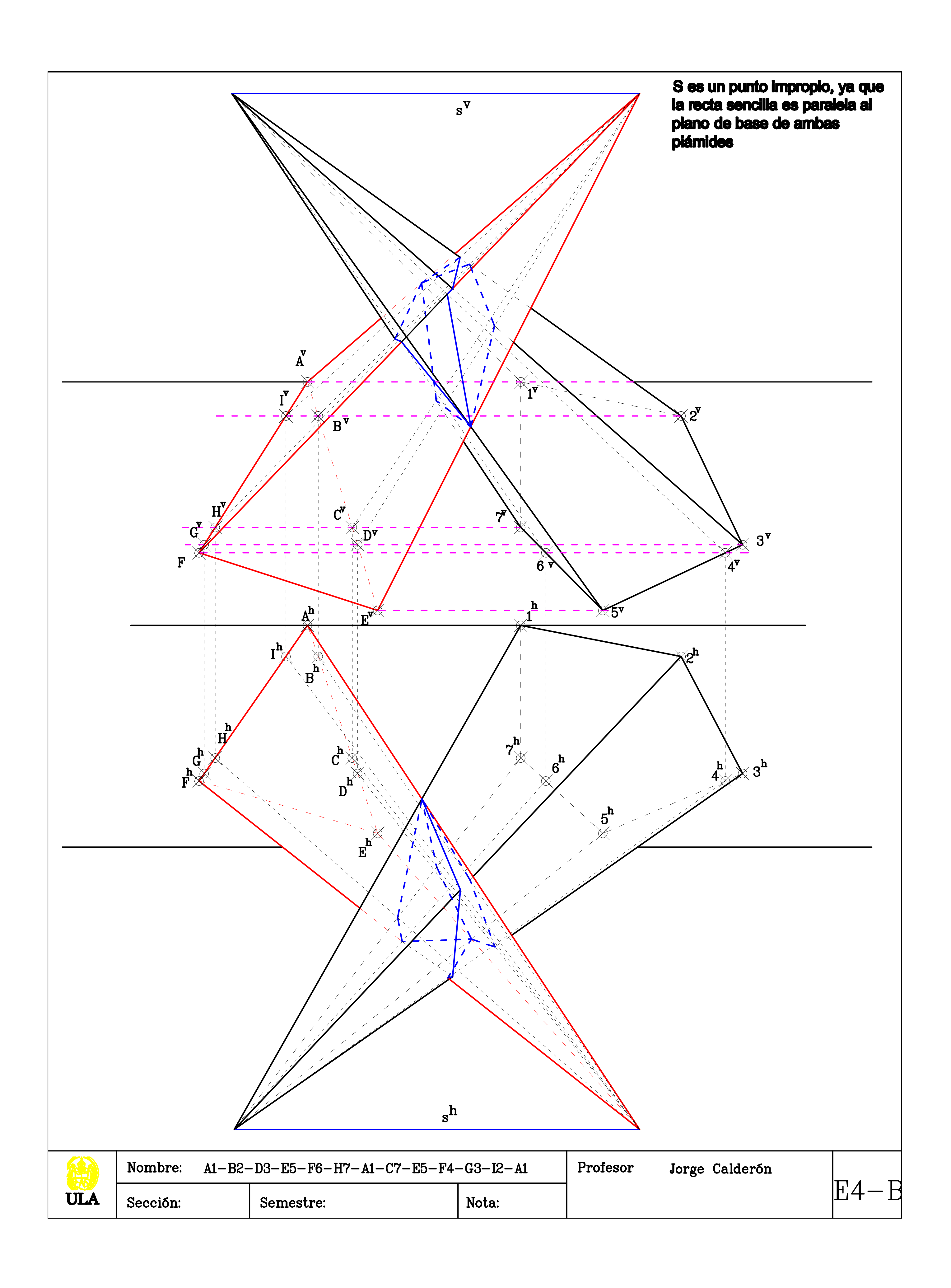

ULA
Nombre:
Sección:
Semestre:
Nota:
Profesor
Jorge Calderón
E3– A

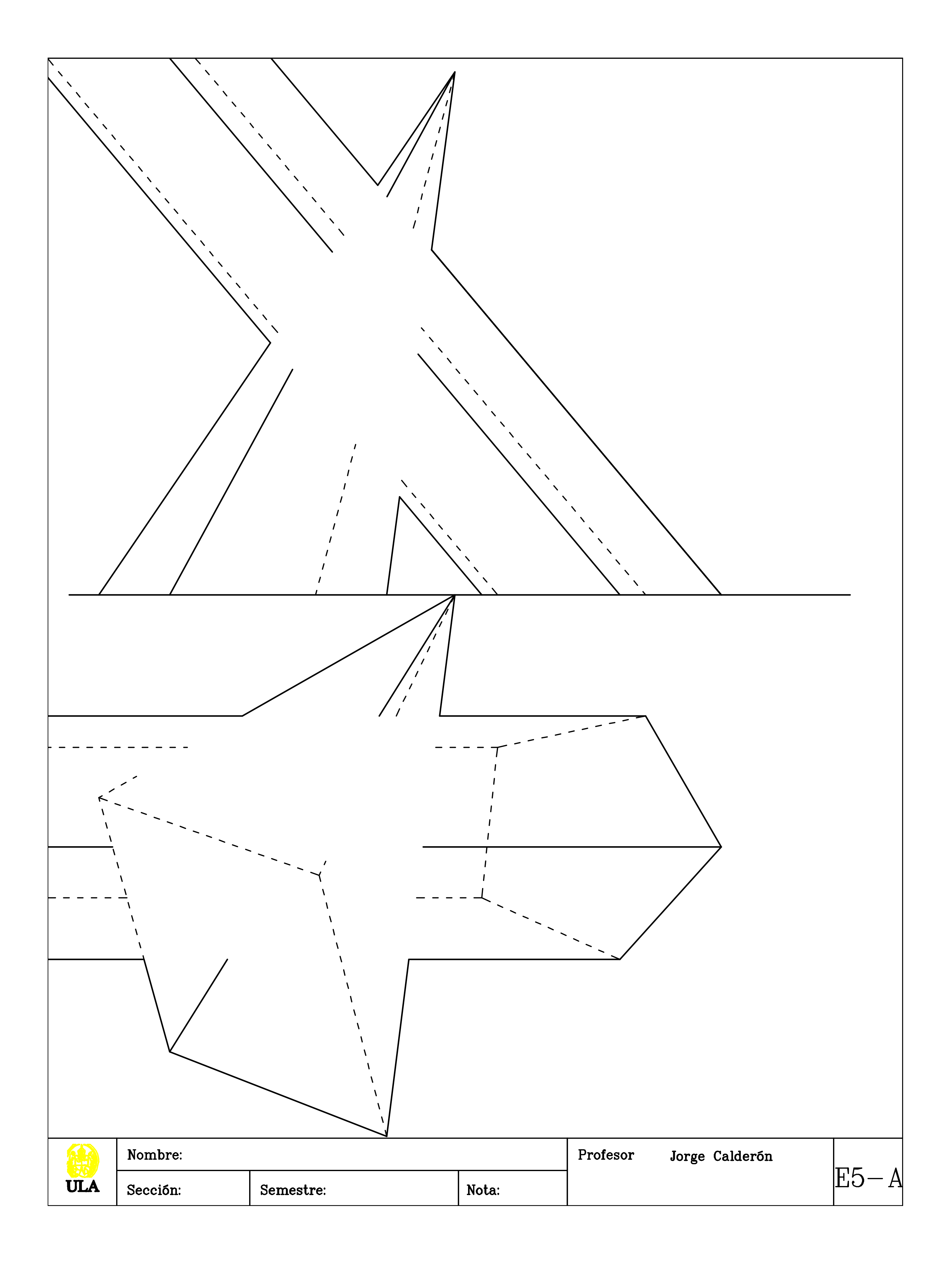

1v
2v
3v
4v
5v
6v
7v
1h
2h
3h
4h
5h
6h
7h
ULA
Nombre:
Sección:
Semestre:
Nota:
Profesor
Jorge Calderón
E3–B

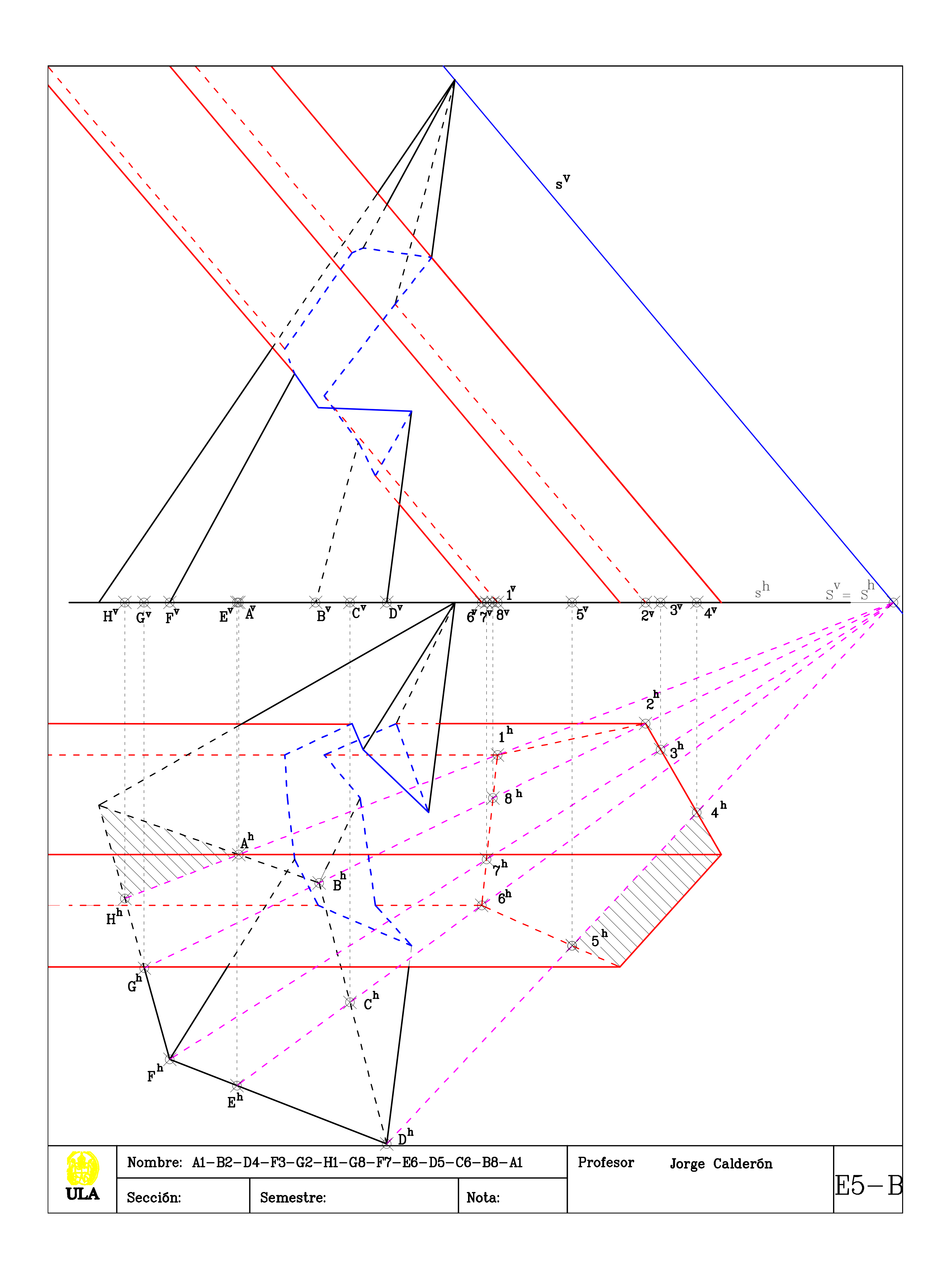


ULA
Nombre:
Sección:
Semestre:
Nota:
Profesor
Jorge Calderón
E3–C

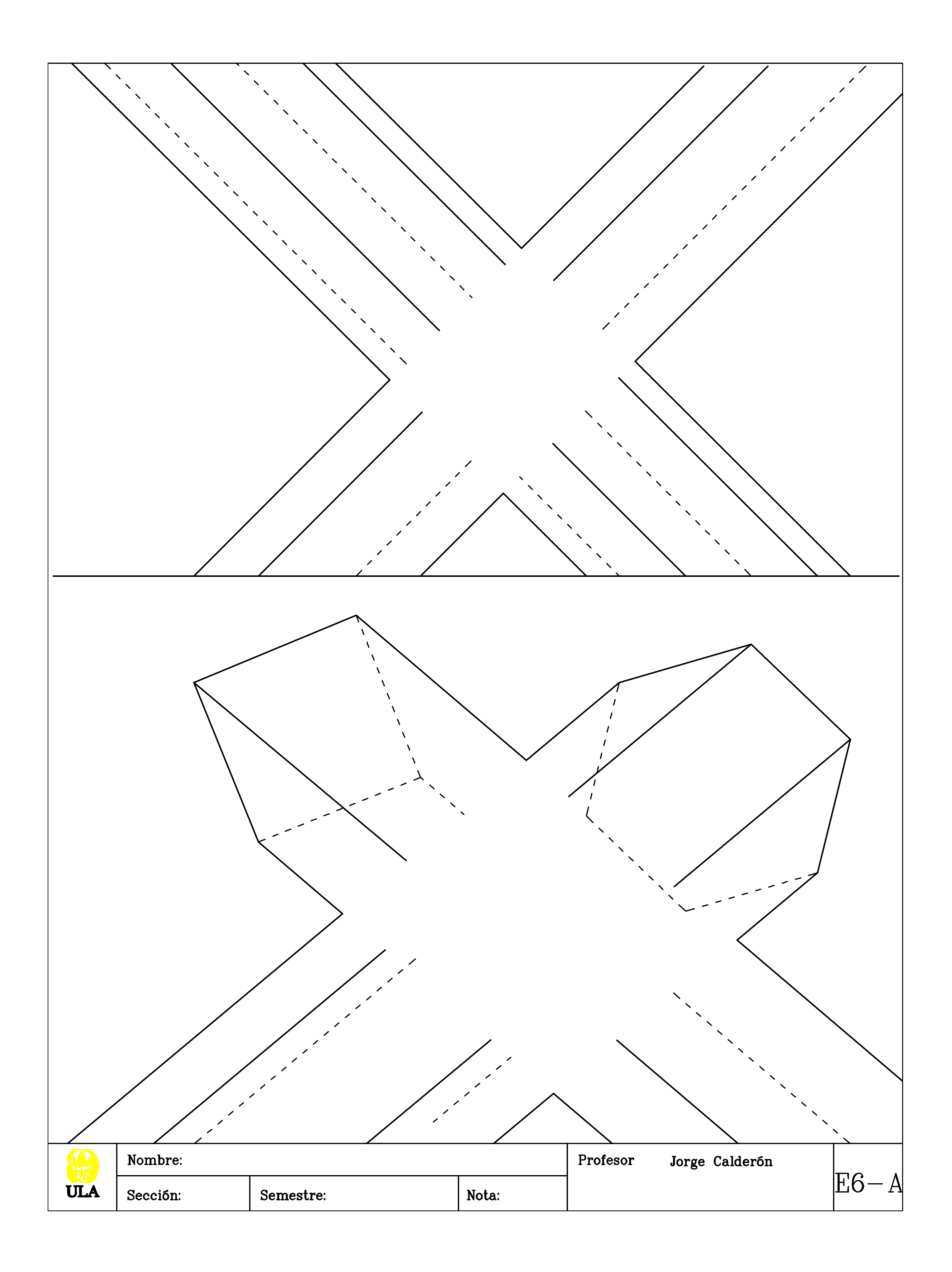

ULA
Nombre:
Sección:
Semestre:
Nota:
Profesor
Jorge Calderón
E4–A


S es un punto impropio, ya que la recta sencilla es paralela al plano de base de ambas plámides
s^v
A^v
I^v
B^v
1^v
2^v
H^v
C^v
7^v
G^v
D^v
3^v
F
6^v
4^v
E^v
5^v
A^h
1^h
I^h
B^h
2^h
H^h
G^h
C^h
7^h
6^h
F^h
D^h
4^h
3^h
5^h
E^h
s^h
ULA
Nombre: A1-B2-D3-E5-F6-H7-A1-C7-E5-F4-G3-I2-A1
Profesor Jorge Calderón
Sección:
Semestre:
Nota:
E4-B

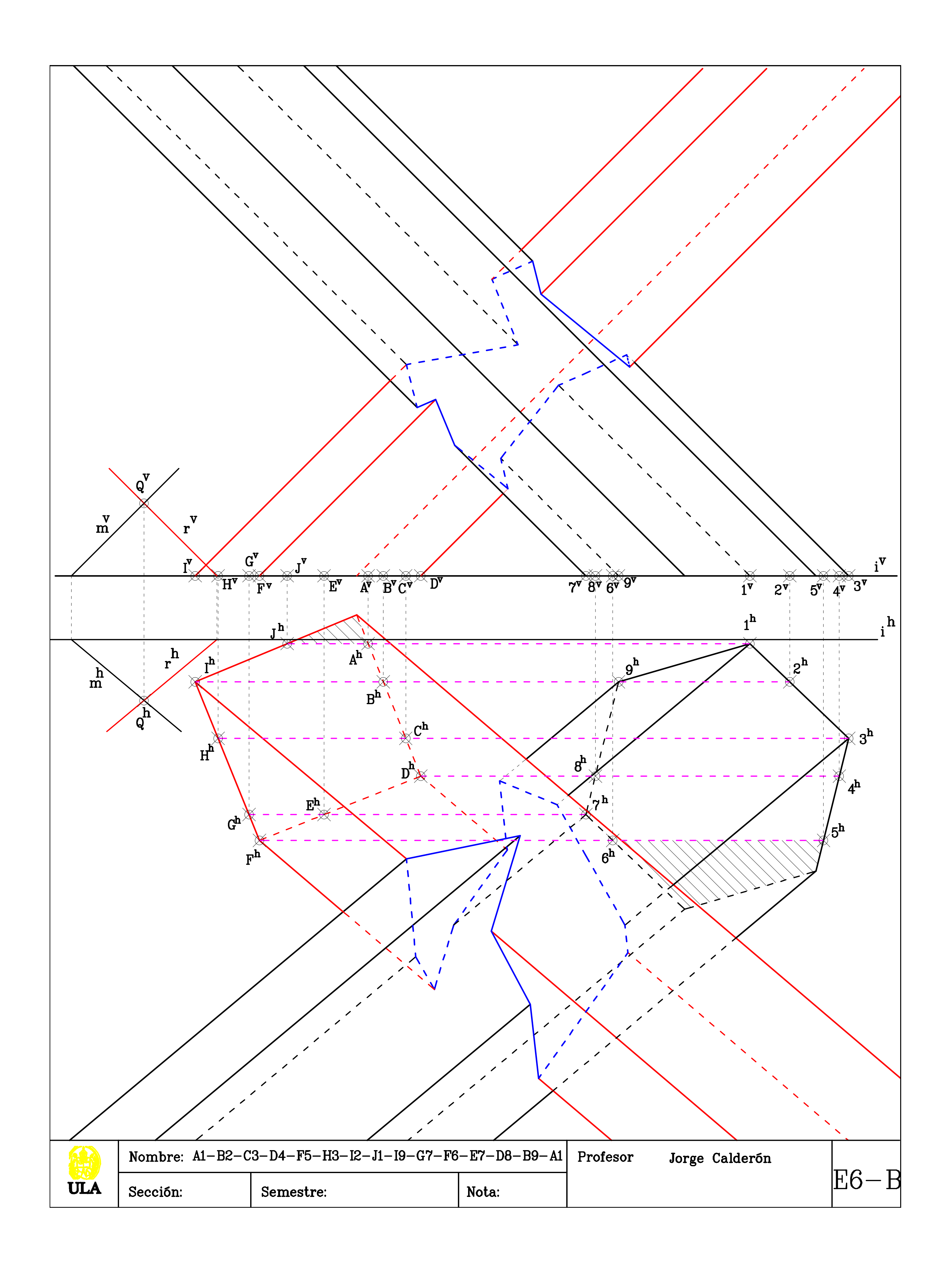

Nombre:
Profesor Jorge Calderón
ULA
Sección:
Semestre:
Nota:
E5–A



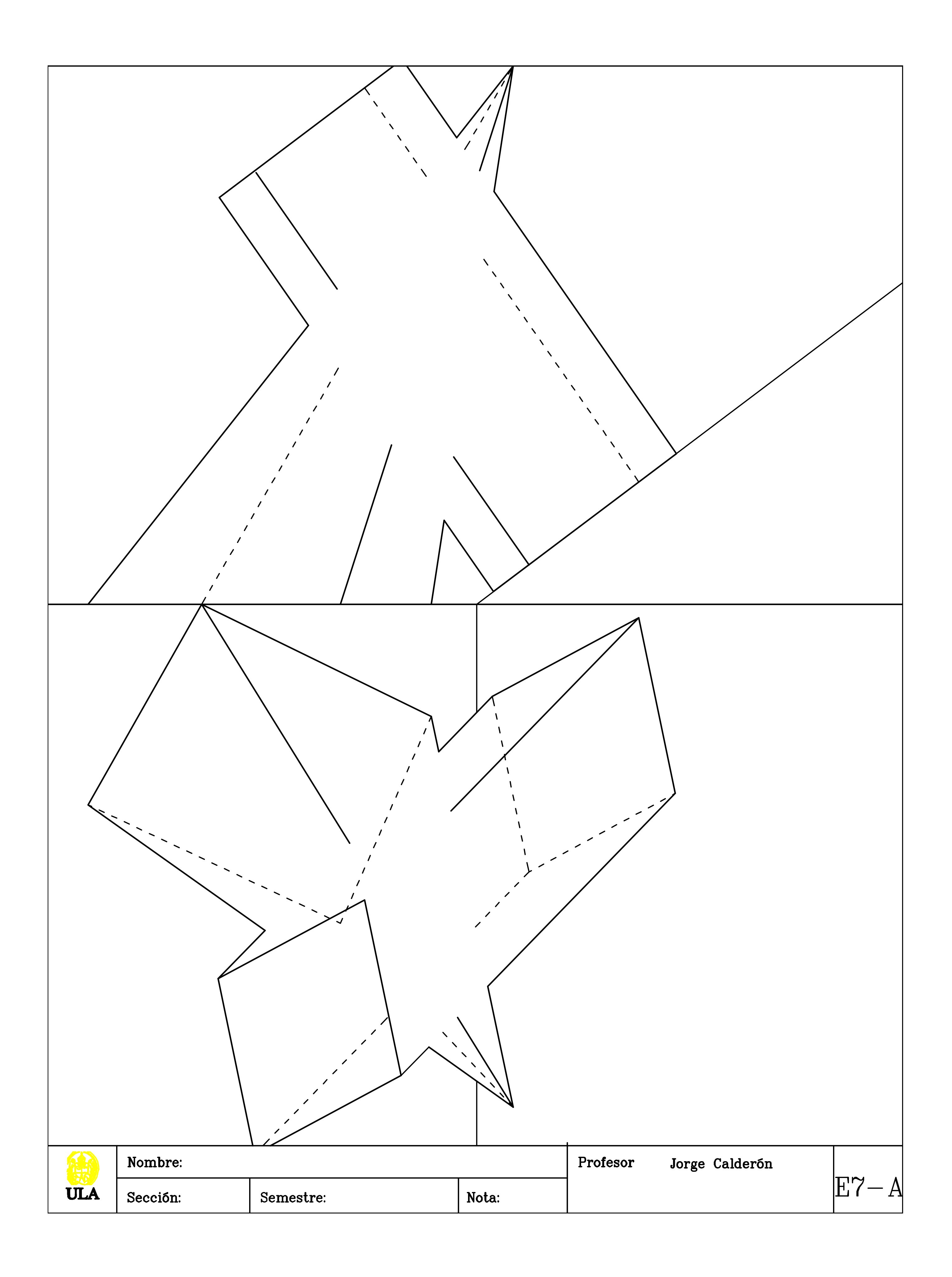
s^v
s^h
S^v = S^h
H^v G^v F^v E^v A^v B^v C^v D^v 6^v 7^v 8^v 1^v 5^v 2^v 3^v 4^v
2^h 1^h 3^h 8^h 4^h A^h 7^h B^h H^h 6^h 5^h G^h C^h F^h E^h D^h
ULA
Nombre: A1-B2-D4-F3-G2-H1-G8-F7-E6-D5-C6-B8-A1
Profesor Jorge Calderón
Sección:
Semestre:
Nota:
E5-B



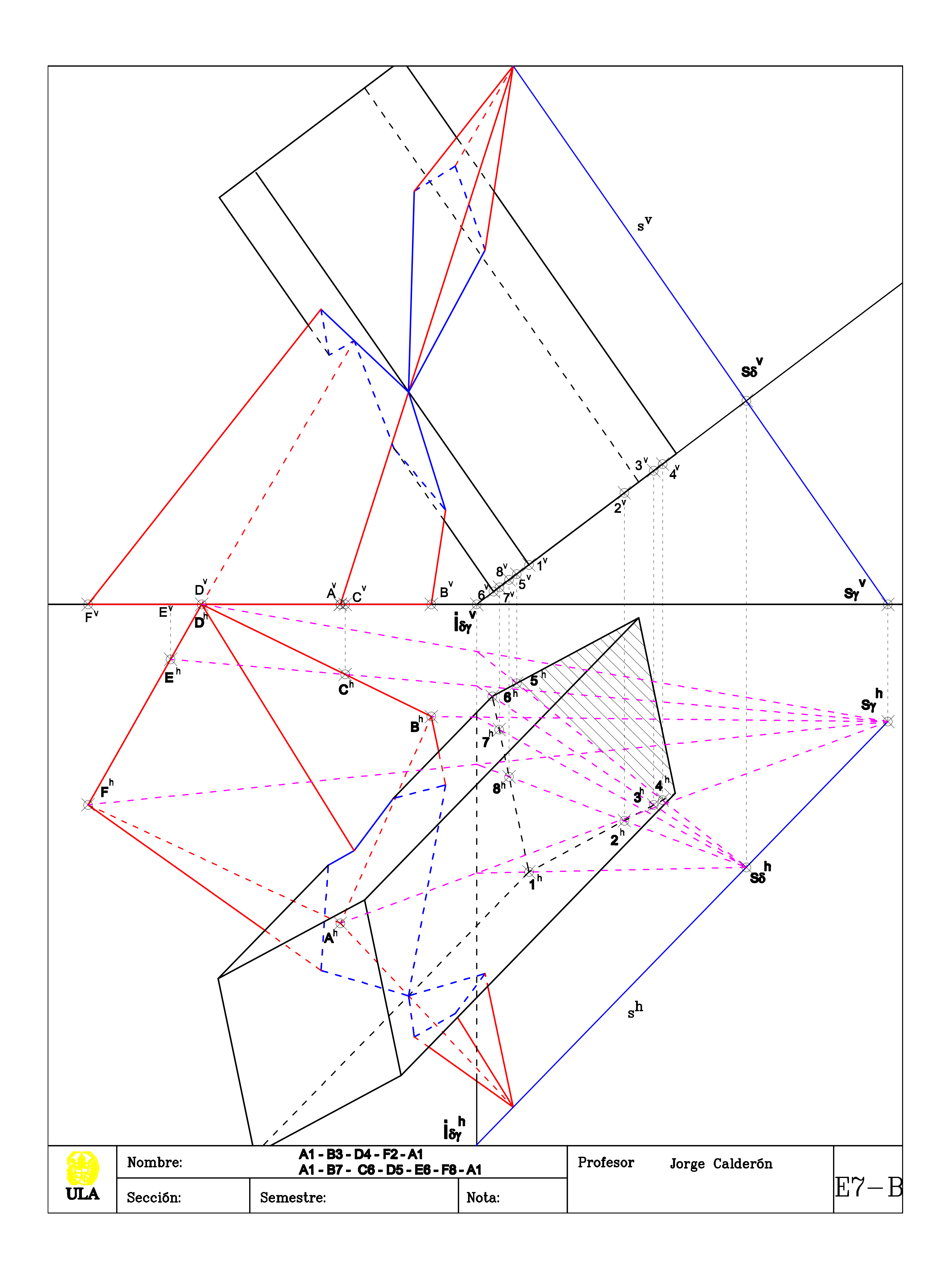
ULA
Nombre:
Sección:
Semestre:
Nota:
Profesor
Jorge Calderón
E6–A



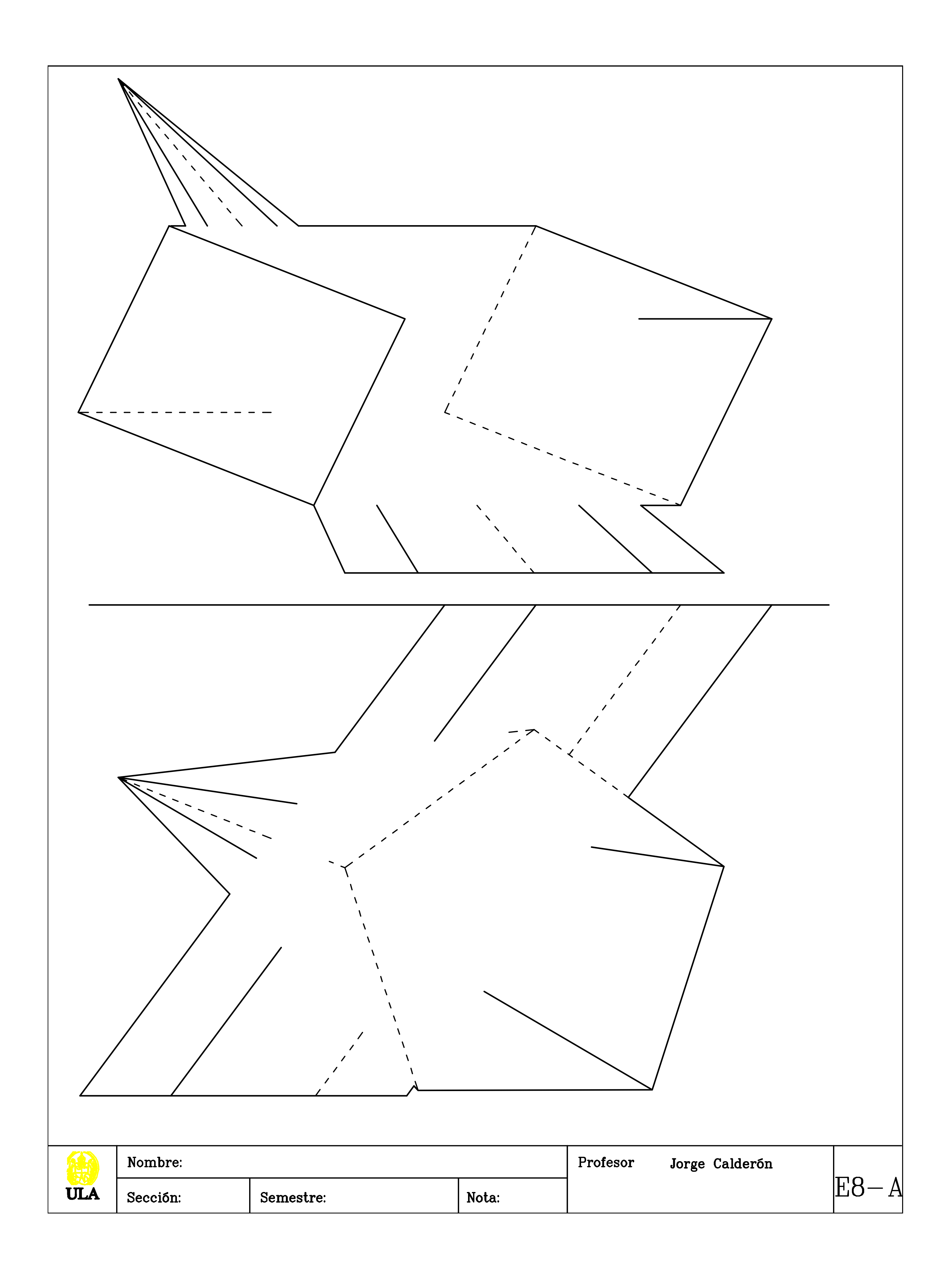
Q^v
m^v
r^v
I^v
H^v
G^v
F^v
J^v
E^v
A^v
B^v
C^v
D^v
7^v
8^v
6^v
9^v
1^v
2^v
5^v
4^v
3^v
i^v
i^h
1^h
J^h
A^h
r^h
I^h
m^h
Q^h
B^h
9^h
2^h
C^h
3^h
H^h
8^h
D^h
4^h
E^h
7^h
G^h
5^h
F^h
6^h
Nombre: A1–B2–C3–D4–F5–H3–I2–J1–I9–G7–F6–E7–D8–B9–A1
Profesor Jorge Calderón
ULA
Sección:
Semestre:
Nota:
E6–B

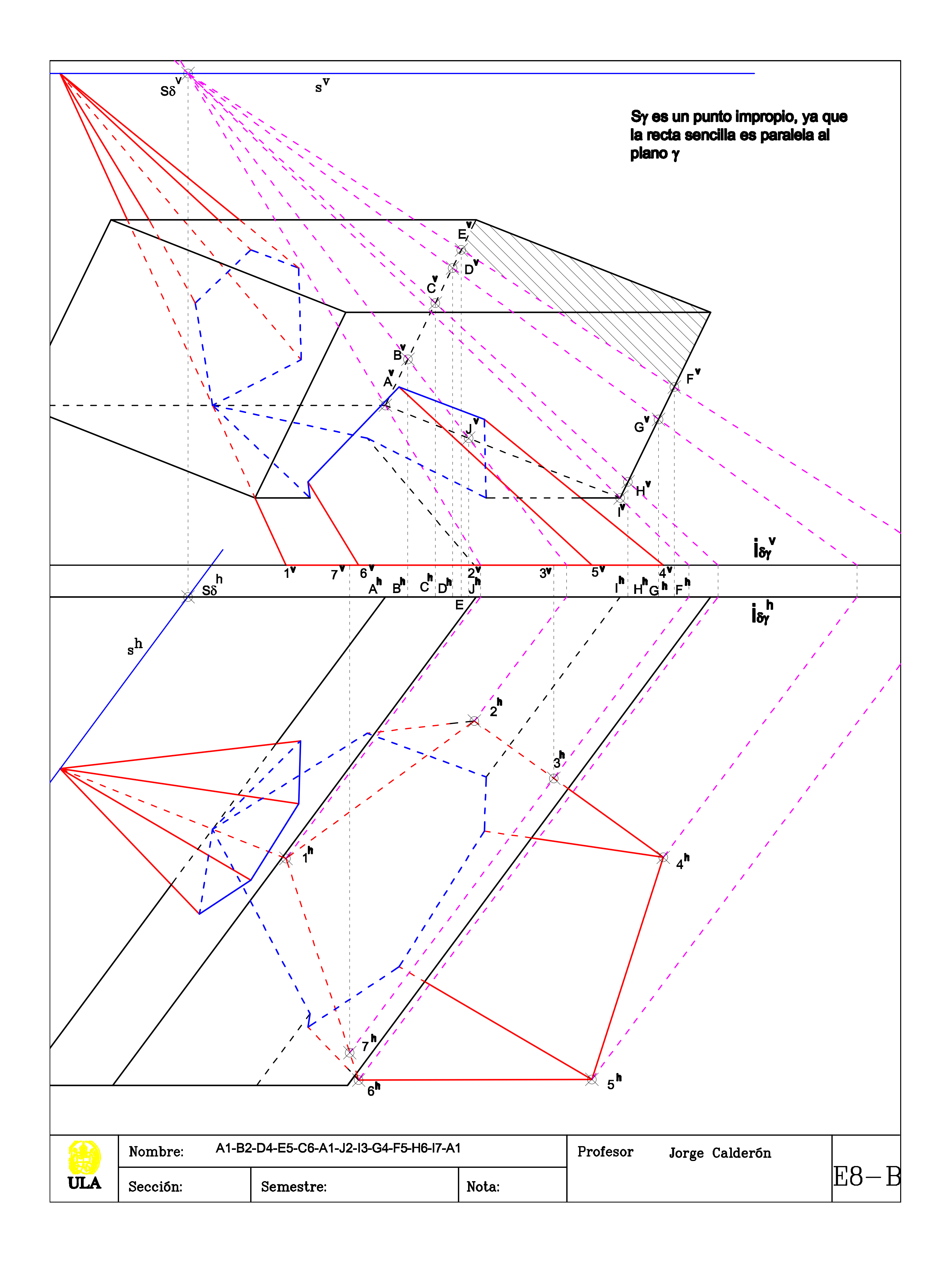


ULA
Nombre:
Profesor
Jorge Calderón
Sección:
Semestre:
Nota:
E7−A

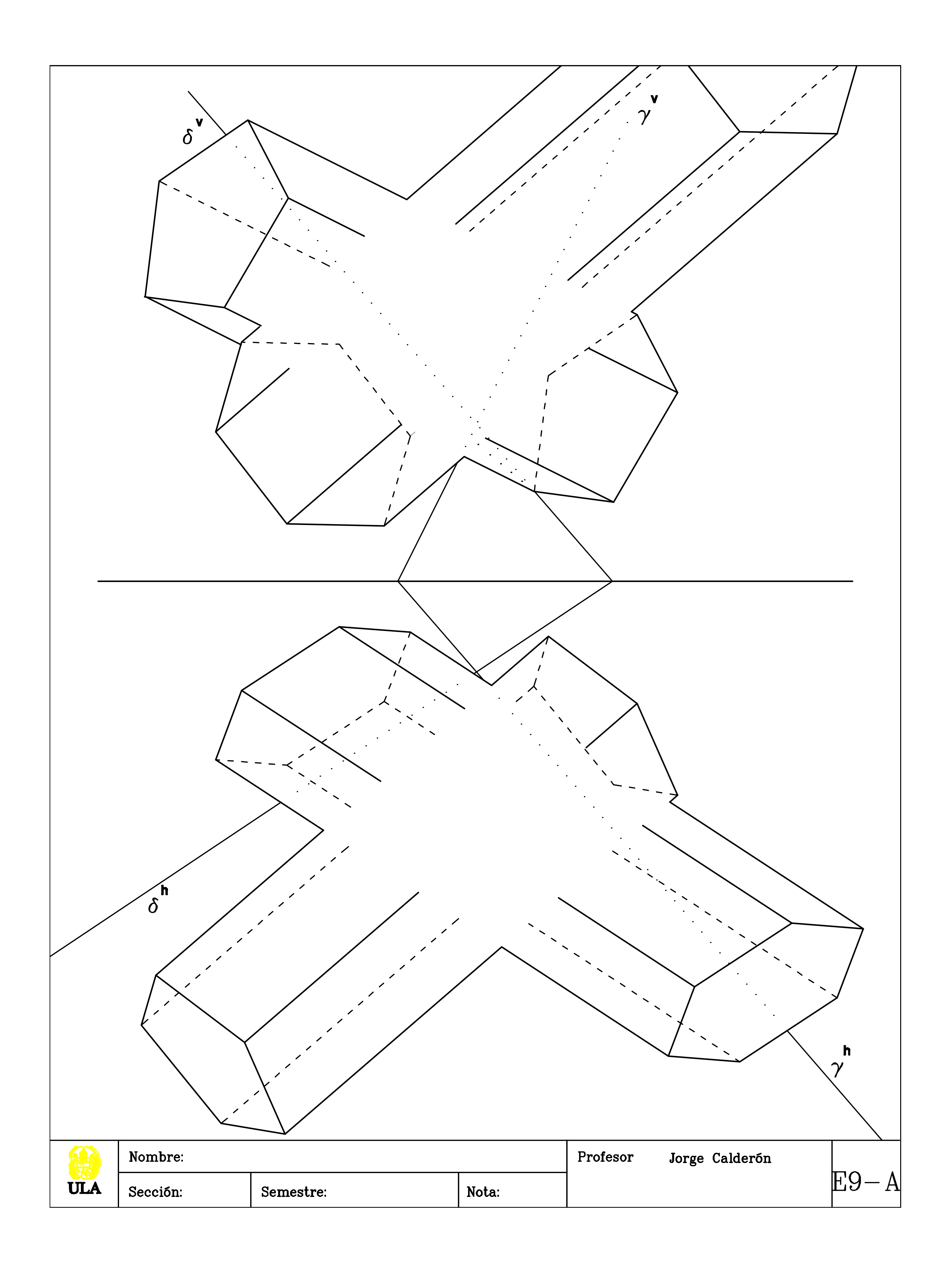


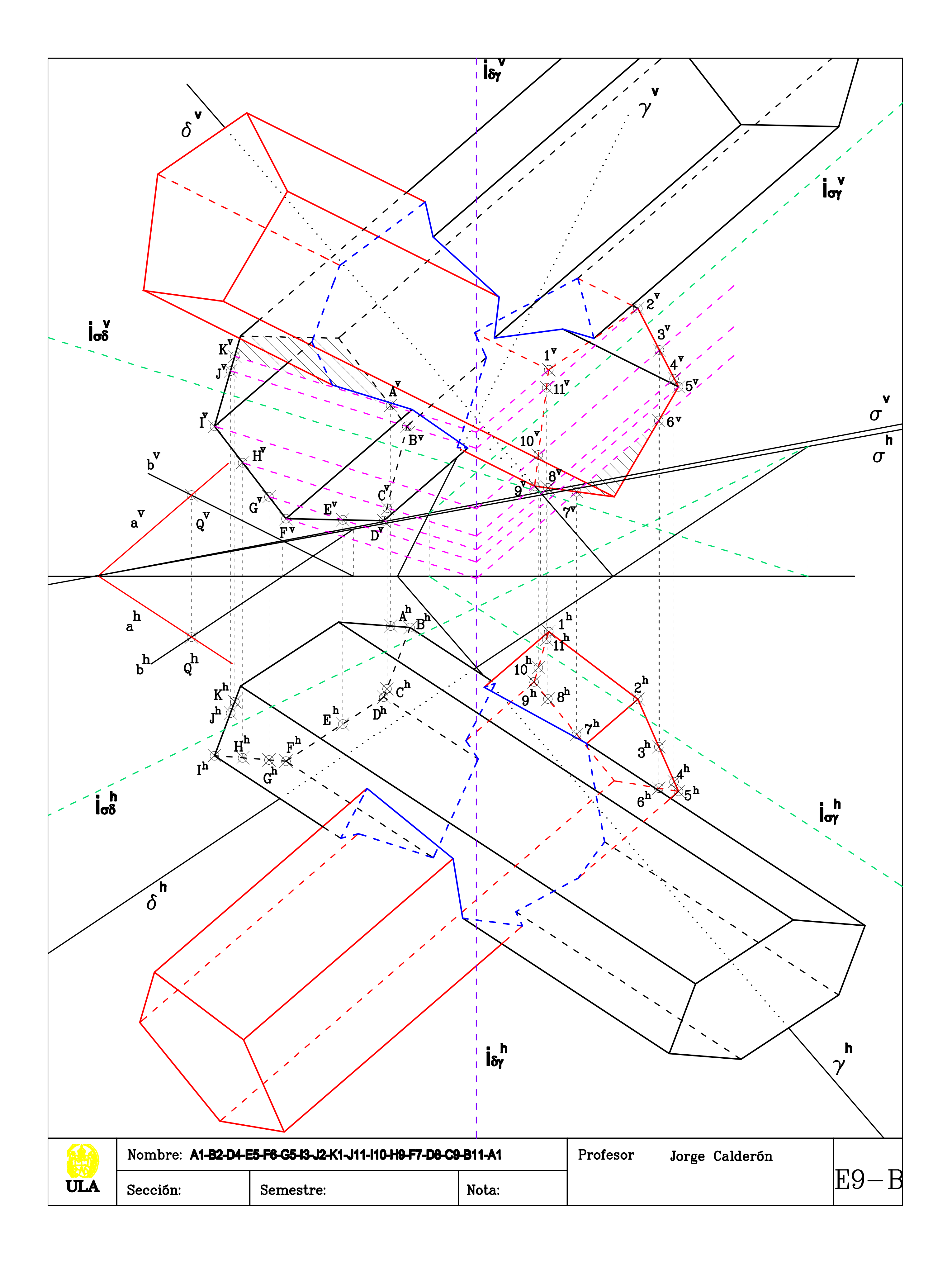
ULA	Nombre:	A1 - B3 - D4 - F2 - A1 A1 - B7 - C6 - D5 - E6 - F8 - A1	Profesor Jorge Calderón	E7−B
	Sección:	Semestre:	Nota:	


Nombre:
Sección:
Semestre:
Nota:
Profesor
Jorge Calderón
ULA
E8-A



Sδ^v
s^v
Sγ es un punto impropio, ya que la recta sencilla es paralela al plano γ
E^v
D^v
C^v
B^v
A^v
J^v
F^v
G^v
H^v
I^v
iδγ^v
1^v 7^v 6^v 2^v 3^v 5^v 4^v
A^h B^h C^h D^h J^h I^h H^h G^h F^h
E
Sδ^h
iδγ^h
s^h
2^h
3^h
1^h
4^h
7^h
6^h
5^h
ULA
Nombre: A1-B2-D4-E5-C6-A1-J2-I3-G4-F5-H6-I7-A1
Profesor Jorge Calderón
Sección:
Semestre:
Nota:
E8-B


δ^v
γ^v
δ^h
γ^h
ULA
Nombre:
Sección:
Semestre:
Nota:
Profesor Jorge Calderón
E9–A



$i_{\delta\gamma}^v$
γ^v
δ^v
$i_{\sigma\gamma}^v$
$i_{\sigma\delta}^v$
σ^v
σ^h
a^v
b^v
Q^v
a^h
b^h
Q^h
$i_{\sigma\delta}^h$
$i_{\sigma\gamma}^h$
δ^h
$i_{\delta\gamma}^h$
γ^h
ULA
Nombre: A1-B2-D4-E5-F6-G5-I3-J2-K1-J11-I10-H9-F7-D8-C9-B11-A1
Profesor Jorge Calderón
Sección:
Semestre:
Nota:
E9–B

FUENTES

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

OSERS, Harry (2004). *Estudio de Geometría Descriptiva*. Editorial Torino. Caracas.

RANELLETTI, C. (1958). *Elementos de geometría descriptiva y sus aplicaciones a la teoría de las sombras y al corte de piedras y maderas*. Editorial Gustavo Gili. Barcelona.

RONDÓN R., Alicia y TÉLLEZ, Mary (1985). *Sistemas de Representación*. Universidad de Los Andes, Facultad de Arquitectura. Consejo de Publicaciones. Mérida.

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

IZQUIERDO A., *Fernando. Geometría Descriptiva.* Editorial Dossat. Madrid, 1985.

OSERS, Harry (2004). *Estudio de Geometría Descriptiva*. Editorial Torino. Caracas.

RANELLETTI, C. (1958). *Elementos de geometría descriptiva y sus aplicaciones a la teoría de las sombras y al corte de piedras y maderas*. Editorial Gustavo Gili. Barcelona.

RODRÍGUEZ DE ABAJO, E. J. (1958). *Geometría Descriptiva.* Bosch Casa Editorial. Barcelona, España.

GONZÁLEZ G., Fausto A. (1985). *Perspectiva y Sombras.* Universidad de Los Andes, Facultad de Arquitectura. Consejo de Publicaciones Mérida.

RONDÓN R., Alicia y TÉLLEZ, Mary (1985). *Sistemas de Representación*. Universidad de Los Andes, Facultad de Arquitectura. Consejo de Publicaciones. Mérida.